RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

PROBABILITES

CLASSIQUES

PROBABILITES DES EVENEMENTS

NOTIONS D'EVENEMENTS

DEFINITIONS : *Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne dépend que du hasard.*

On appelle univers associé à une expérience aléatoire l'ensemble, noté Ω, de tous les résultats possibles.

Quelques exemples classiques d'univers

Lorsque l'on jette une pièce de monnaie on pourra prendre pour univers : $\Omega = \{P, F\}$.

Lorsque l'on jette un dé à 6 faces, on pourra prendre pour univers : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} = [\![1, 6]\!]$.

Terminologie : Les éléments e_k de Ω s'appellent les éventualités.

Lorsqu'on lance 3 dés normaux identiques. On a deux possibilités :

- On les lance l'un après l'autre, et on peut prendre $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$.
- On les lance en même temps. On peut considérer, sans changer l'expérience que les dés sont différentiables (couleurs différentes ou qu'on les lance en fait successivement) : on pourra prendre encore $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$

DEFINITION : *Un événement est une partie de l'univers.*

Il est constitué d'un certain nombre (peut-être infini) d'éventualités. Soit A un événement ; A est inclus dans Ω, et si $A = \{e_1, \ldots, e_k \ldots\}$, on peut dire que A est la réunion des singletons $\{e_k\}$. $A = \bigcup_{e_i \in A} \{e_i\}$. Dès qu'une éventualité qui compose A est réalisée, A est lui-même réalisé.

Evénements particuliers

$\emptyset$ ne comporte aucune éventualité, il ne peut pas se réaliser, c'est l'événement impossible.

Ω est l'événement certain, car, quand on effectue l'expérience, une éventualité apparaît, donc Ω est réalisé.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Le singleton $\{e_k\}$ est un évènement réduit à une éventualité ; c'est un événement élémentaire.

ALGEBRE (OU TRIBU) DES EVENEMENTS

DEFINITION : *Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. On appelle ensemble des événements associés à cette expérience, toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) $\Omega \in \mathcal{T}$ (Ω *est un événement*)

(2) $\forall A \in \mathcal{T},\ \overline{A} \in \mathcal{T}$ ($\overline{A}$ *est l'événement contraire de A, constitué de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A, noté aussi $\Omega \setminus A$*)

(3) *Pout toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$,* $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$

Terminologie : une telle partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle une tribu ou une σ-algèbre.

On a les propriétés suivantes :

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(b) Pour toute suite (B_n) d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{T}$

(c) $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2, A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{T}$

THEOREME : Si les singletons sont des événements et si Ω est fini ou dénombrable, la tribu des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$.

DEFINITION : *On appelle espace probabilisable associé à une expérience aléatoire la donnée de l'univers Ω et d'une tribu $\mathcal{T}$ des événements.*

Nous l'écrirons $(\Omega, \mathcal{T})$.

OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

Soit A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ représente la réalisation simultanée de A et de B.

Quand $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.

Les événements élémentaires correspondant à 2 éventualités différentes sont incompatibles.

- L'événement $\overline{A}$, constitué des éventualités de Ω qui ne sont pas dans A, s'appelle l'événement contraire de A. Du point de vue ensembliste, c'est le complémentaire de A dans Ω.

A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

- L'événement $A \cup B$ représente la réalisation d'au moins un de ces 2 événements. Il n'est pas exclu qu'il y ait des éventualités communes à A et B.

- L'événement $A \setminus B$ (noté aussi $A - B$) représente la réalisation de A, mais pas celle de B ; on peut donc écrire $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Règles opératoires :

Pour tous événements A, B, C, on a les règles suivantes (qui sont les règles de calcul sur les sous-ensembles) :

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

$A \cap A = A \cup A = A$

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ ce sont les commutativités

$A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap \Omega = A$

$A \cup \emptyset = A$; $A \cup \Omega = \Omega$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ Ce sont les associativités.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ce sont les distributivités d'une opération sur l'autre.

$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$; **lois de Morgan.**

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (très utiles). Ces formules se généralisent à une famille quelconque (finie ou infinie) d'événements.

Soit $((A_i), i \in J)$ une famille d'événements (J est l'ensemble des indices ; J pourra être $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$, ou une partie non vide de $\mathbb{N}$).

$$\overline{\bigcup_{k\in J} A_k} = \bigcap_{k\in J} \overline{A_k} \quad ; \quad \overline{\bigcap_{k\in J} A_k} = \bigcup_{k\in J} \overline{A_k}.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. J a la signification précédente.

DEFINITION : *On appelle système complet d'événements, toute famille $(A_i), i \in J$ finie ou dénombrable d'événements, formant une partition de Ω, c'est-à-dire vérifiant :*

(1) $\forall (i,j) \in J^2, i \neq j \;\; A_i \cap A_j = \emptyset$

(2) $\forall i \in J, A_i \neq \emptyset$.

(3) $\bigcup_{i\in J} A_i = \Omega$

Remarque : si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, La famille constituée par tous les événements élémentaires de Ω forme un système complet d'événements.

Application : Soit B un événement et $(A_i), i \in J$ un système complet d'événements : $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) = \bigcup_{i\in J} (A_i \cap B)$.

Remarque : En général J sera inclus dans $\mathbb{N}$ mais il n'est pas interdit que ce soit une partie de $\mathbb{Z}$.

PROBABILITES DES EVENEMENTS

DEFINITION : *Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application, notée P, de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant aux conditions suivantes* :

1) $\forall A \in \mathcal{T}, \;\; P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Soit $(A_i)_{i\in I \subset N, I \text{infini}}$, 2 à 2 incompatibles, alors

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.