



RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



VARIABLES ALEATOIRES

REELLES DISCRETES

**VARIABLES ALEATOIRES
REELLES DISCRETES**

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé et X une application de Ω dans \mathbb{R} .

DEFINITION : On dit que X est une variable aléatoire réelle (abrégié VAR) si pour tout réel x , l'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$ est un événement, c'est-à-dire un élément de \mathcal{T} .

Il est équivalent de dire : pour tout intervalle I de \mathbb{R} , l'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\}$ est un événement.

Remarque : Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans \mathbb{R} est une VAR.

Notations : Si A est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} , on notera

$(X \in A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$. C'est en fait l'ensemble des antécédents par X des éléments de A .

Cas particuliers

$(X = a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\} = (X \in \{a\})$, où a est un réel donné.

$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\} = (X \in]-\infty, a])$, où a est un réel donné.

$(a \leq X < b) = \{\omega \in \Omega / a \leq X(\omega) < b\} = (X \in [a, b])$, où a et b sont des réels donnés.

etc...

$X(\Omega)$ sera, comme pour les applications réelles, l'ensemble des images par X des éléments de Ω , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X .

VARIABLES DISCRETES

DEFINITION : Soit X une VAR de Ω dans \mathbb{R} . On dit que X est une variable aléatoire réelle discrète (en abrégé VARD) si l'ensemble $X(\Omega)$ est dénombrable (fini ou non).

2 Variables aléatoires discrètes

Notations : Si $X(\Omega)$ est fini, on écrira $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, on écrira

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ où $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$

LOI DE PROBABILITE D'UNE VARD

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé et X une VARD de Ω dans \mathbb{R} .

Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où I désigne l'ensemble des indices ; donc I sera $[1, n]$ ou \mathbb{N}^* en général.

DEFINITION : On appelle loi de probabilité de X la donnée de $\{(x_i, P(X = x_i)), i \in I\}$. C'est donc la donnée des couples des valeurs prises par X et des probabilités correspondantes.

Propriétés d'une loi de probabilité d'une VARD

- $\forall x_i \in X(\Omega), P(X = x_i) \geq 0$.
- $\{(X = x_i), i \in I\}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

Caractérisation d'une loi de probabilité d'une VARD

THEOREME : Soit $A = \{x_i, i \in I\}$ une partie dénombrable de \mathbb{R} et une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{i \in I} f(x_i) = 1$. Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé ; il existe une VARD $X : \Omega \rightarrow A$ telle que : $\forall i \in I, f(x_i) = P(X = x_i)$.

FONCTION DE REPARTITION

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé et une VARD $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, (X \leq x)$ est un événement ; sa probabilité existe donc.

DEFINITION : On appelle fonction de répartition de X l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$.

On remarque que :

$$P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = \sum_{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x} P(\{\omega\})$$

PROPRIETES D'UNE FONCTION DE REPARTITION D'UNE VARD

- F est définie sur \mathbb{R}
- F est croissante
- F est en escalier
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

• **Continuité**

Pour $\alpha \notin X(\Omega)$, F est continue en α .

Pour $\alpha \in X(\Omega)$, F est continue à droite, discontinue à gauche.

Caractérisation d'une fonction de répartition

Soit F une application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ possédant les propriétés suivantes : F est croissante au sens large sur \mathbb{R} ,

il existe une suite de réels (a_i) , $i \in I$ (en général $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ ou \mathbb{N}^* ou très rarement \mathbb{Z}), croissante strictement, telle que F soit en escalier pour la suite (a_i) , $i \in I$ (F est constante sur $[a_i, a_{i+1}[$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Alors F est la fonction de répartition d'une VARD d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

• **Détermination de la loi d'une VARD par la fonction de répartition :**

Dans les conditions du théorème précédent, on a :

$$X(\Omega) = \{a_i, i \in I\} \text{ et } P(X = a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} F(x) - \lim_{x \rightarrow a_i^-} F(x).$$

FONCTION D'UNE VARD

Soit X une VARD de Ω dans \mathbb{R} et g une application définie sur $X(\Omega)$ (au moins), alors $Y = g \circ X$ est une VARD sur Ω , notée $g(X)$.

SOMME ET PRODUIT DE VARD

Si X_1, \dots, X_n sont des VARD de Ω dans \mathbb{R} , alors $X_1 + \dots + X_n$ et $X_1 \times \dots \times X_n$ sont des VARD de Ω dans \mathbb{R} .

LOIS DISCRETES CLASSIQUES

On supposera donné l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

VARIABLE CERTAINE

DEFINITION : X est une variable certaine si l'application X est constante, donc s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = a$; ce qui veut dire que $X(\Omega) = \{a\}$.

VARIABLE QUASI-CERTAINE

DEFINITION : X est une variable certaine si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$

VARIABLE UNIFORME

DEFINITION : X est une variable uniforme discrète s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et si } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_k) = \frac{1}{n}.$$

Terminologie : Si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, on dira que X suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$.

4 Variables aléatoires discrètes

VARIABLE DE BERNOULLI

DEFINITION : X est une variable de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et s'il existe un nombre réel $p \in]0, 1[$ tel que $P(X = 1) = p$.

Alors $P(X = 0) = 1 - p$, car $(X = 1) = \overline{(X = 0)}$.

Terminologie : On dira souvent que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Cas général : On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à 2 issues : succès, échec ; la probabilité du succès étant $p \in]0, 1[$.

VARIABLE BINOMIALE

DEFINITION : X est une variable binomiale s'il existe un nombre réel $p \in]0, 1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On effectue, de manière indépendante les unes des autres, n épreuves de Bernoulli identiques et on note X la VARD égale au nombre de succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque : des tirages avec remise peuvent être considérés comme la répétition, de manière indépendante, d'une même épreuve de Bernoulli.

VARIABLE HYPERGEOMETRIQUE

DEFINITION : X est une variable hypergéométrique s'il existe un entier non nul n , un entier non nul N , $n \leq N$, un réel $p \in]0, 1[$ tels que :

$Np \in \mathbb{N}^*$, $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$ (C'est la formule de Vandermonde).

On note $q = 1 - p$, $N_1 = Np$, $N_2 = N(1 - p)$ (donc la connaissance de N_1 et N détermine celle de p). On dira souvent que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n, p et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

$$X(\Omega) = [\text{Max}(0, n - N_2), \text{Min}(n, N_1)]$$

Cas général : On a une urne composée de boules indiscernables au toucher, divisée en deux catégories : une catégorie U_1 constituée de N_1 boules et une catégorie U_2 constituée de N_2 boules. On pose $N = N_1 + N_2$ et $p = \frac{N_1}{N}$.

On tire au hasard et sans remise n boules de l'urne et on considère la variable X égale au nombre de boules de U_1 obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$