RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

SYSTEMES D'EQUATIONS

DEFINITION : *Un système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \cdots, x_p$ est un système du type suivant :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p,}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Où les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R}$ seront parfois appelés les scalaires.

DEFINITION : *Une solution du système est un p-uplet de $\mathbb{R}^p$, que nous noterons $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ qui est solution de toutes les équations du système.*

Un système est dit homogène si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

On peut donc remarquer qu'un système linéaire est homogène si et seulement s'il admet le p-uplet $(0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^p$ comme solution.

RESOLUTION

On remplace un système par un système équivalent (c'est-à-dire un système ayant le même ensemble de solutions) en appliquant les règles suivantes :

$*$ On peut changer l'ordre des équations : on codera $L_i \longleftrightarrow L_j$, l'opération " échanger les lignes L_i et L_j ".

$*$ On peut changer l'ordre des inconnues (mais en gardant, bien sûr, les coefficients qui les multiplient) : on codera $C_i \longleftrightarrow C_j$, l'opération " échanger les colonnes C_i et C_j ".

$*$ On peut multiplier les deux membres d'une équation par un même scalaire **non nul** λ. L'opération " remplacer la i$^{\text{ème}}$ ligne, notée L_i, du système par λL_i ", se codera $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.

$*$ Soient i et j deux numéros de lignes **distincts** ; soit d'autre part λ et μ deux scalaires ($\underline{\lambda \neq 0}$) : l'opération " remplacer la i$^{\text{ème}}$ ligne L_i par $\lambda L_i + \mu L_j$ " se codera $L_i \longleftarrow \lambda L_i + \mu L_j$.

> **Z** $\rightarrow$: Si $\mu = 0$, $L_i \longleftarrow \lambda L_i$. Mais si $\underline{\lambda = 0}$, alors on a remplacé la ligne L_i par la ligne μL_j , autrement dit la ligne L_i a disparu : le système n'a aucune raison en général d'avoir le même ensemble de solutions que le système initial qui contenait la ligne L_i.

METHODE DU PIVOT DE GAUSS

SYSTEMES REDUITS

La méthode du pivot de Gauss consiste à remplacer un système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients non tous nuls (sinon la résolution est immédiate) par un système équivalent, triangulaire, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{r,r}x_r & \cdots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

Les $n - r$ dernières équations apparaissent si $r < n$

(Un tel système sera dit système réduit).

Les équations à coefficients non tous nuls précèdent les autres. Désignons par r le nombre de ces équations ; les inconnues sont ordonnées de telle sorte que pour tout indice $i \in [\![1, r]\!]$, la i$^{\text{ème}}$ inconnue figure effectivement dans la ligne numéro i : ainsi x_1 figure bien dans la première ligne L_1, x_2 figure bien dans la deuxième ligne L_2 , etc..., x_r figure bien dans la ligne l_r , ce qui veut dire que : $a_{1,1}$ **,** $a_{2,2}$ **, etc...** $a_{r,r}$ **ne sont pas nuls**.

DEFINITION : *Les nombres réels $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots a_{r,r}$, sont appelés pivots.*

Nous envisagerons les trois cas suivants : $n = p$; $n < p$ et $n > p$