RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

TAYLOR ; DEVELOPPEMENTS LIMITES

# DEVELOPPEMENTS LIMITES

## FORMULE DE TAYLOR A L'ORDRE n AVEC RESTE INTEGRAL

### FORMULE DE TAYLOR

**Soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sur un intervalle $I$ non vide de $\mathbb{R}$ et non réduite à un point et $a, b$ deux éléments de $I$.**

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

### FORMULE DE MACLAURIN

**Soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sur un intervalle $I$ contenant $0$ et non réduit à $\{0\}$.**

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$


Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

## L'INEGALITE DE TAYLOR-LAGRANGE

**Soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sur $[a,b]$ $(a \leq b)$.**
$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, **où $M$ est un majorant de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $[a,b]$.**

***Remarque*** :

- On peut appliquer l'inégalité précédente sur $[a,x]$, où $x \in [a,b]$, en gardant la même signification pour $M$.
- Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur $I$ ; on suppose que $|f^{(n+1)}|$ est bornée sur $I$ par un réel $A$. Alors, pour tout $a$ et tout $b$ dans $I$, on peut écrire :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq A \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

# DEVELOPPEMENTS LIMITES

## DEVELOPPEMENT LIMITE EN $x_0$

**DEFINITION :** *Soit $I$ un intervalle contenant $x_0$, non réduit à $x_0$, et $f$ une fonction définie sur $I$ sauf éventuellement en $x_0$. Notons $D_f$ l'ensemble de définition de $f$ ($D_f$ est soit $I$ soit $I - \{x_0\}$). Considérons un entier naturel $n$. On dit que $f$ admet en $x_0$ un développement limité à l'ordre $n$ si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$, un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :*

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \forall x \in D_f,\ f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

On a : $(x - x_0)^n \varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$. Le polynôme $x \longmapsto P_n(x - x_0)$ est la partie principale du développement limité, $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est la partie complémentaire ou le reste.

**Autre écriture :** $f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$.

**PROPRIETES**

- **Une fonction $f$ définie en un point $x_0$ admet en $x_0$ un développement limité à l'ordre $0$ si et seulement si elle est continue en $x_0$.**

Une fonction $f$ non définie en un point $x_0$ admet en $x_0$ un développe- ment limité à l'ordre $0$ si et seulement si elle est prolongeable par continuité en $x_0$.

- **Une fonction $f$, continue en $x_0$, admet en $x_0$ un développe-ment limité à l'ordre $1$ si et seulement si elle est dérivable en $x_0$.**
- Soit une fonction $f$ est continue en $x_0$. Alors $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement elle admet en $x_0$ un développement limité à l'ordre 1. $f'(x_0)$ est

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

le coefficient de $(x - x_0)$ dans le développement : la tangente à la courbe de $f$ au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0))(x - x_0)$ : c'est la partie polynomiale du développement.

**TRONCATURE**

Si une fonction $f$ admet en $x_0$ un développement limité à l'ordre $n$, $n > 0$, alors elle admet en $x_0$ un développement limité à tout ordre $k$, $k < n$. La partie principale du développement limité à l'ordre $k$ s'obtient à partir de la partie principale du développement à l'ordre $n$ en prenant les termes dont le degré est $\leq k$.

**UNICITE**

**Si une fonction admet en un point un développement limité à un ordre donné $n$, ce développement est unique, en ce sens que la partie principale est unique ainsi que la partie complémentaire**

## DEVELOPPEMENT LIMITE ET EQUIVALENT

Soit une fonction $f$ admettant en un point $x_0$ un développement limité à un ordre $n$. Si la partie polynomiale $P_n$ n'est pas le polynôme nul, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} P_n(x)$.

## CONSTRUCTION DE DEVELOPPEMENTS LIMITES

**THEOREME : Toute fonction de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $[a, b]$, admet en tout point $x_0$ de l'intervalle $]a, b[$ un développement limité à l'ordre $n$ donné par :**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x - x_0)^n) \qquad \textbf{ou}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \ \textbf{avec} \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

***Remarque*** : Si $x_0 = 0$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

### DEVELOPPEMENTS CLASSIQUES EN 0

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.