ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2002

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Mesure de l'activité sismique d'une étoile par interférométrie

Le dispositif étudié constitue un interféromètre compact dédié à l'étude sismique de sources stellaires. Le principe proposé, un peu moins efficace qu'un spectromètre à réseau, conduit à un instrument bien moins encombrant et bien moins coûteux. Le principe de l'interféromètre est analysé, ainsi que son installation au foyer d'un télescope et son fonctionnement dans des conditions d'observation réalistes.

On suppose, dans tout le problème, les optiques idéales : lentilles parfaitement transparentes, miroirs totalement réfléchissants, lames semi-réfléchissantes divisant le faisceau incident en deux faisceaux d'intensités lumineuses égales.

Un soin tout particulier devra être apporté aux applications numériques.

Grandeurs physiques

Vitesse de la lumière :	$c = 3,00 \times 10^8$ m s^{-1}
Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
Constante des gaz parfaits :	$R = 8,31$ J K^{-1} mol^{-1}
Masse de l'atome d'hydrogène :	$m_H = 1,67 \times 10^{-27}$ kg
Masse molaire de l'hydrogène atomique :	$M_H = 1$ g mol^{-1}

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

I - Interférométrie

Dans tout ce qui suivra on notera σ le nombre d'onde, à savoir l'inverse de la longueur d'onde λ. On exprimera ce nombre d'onde en m^{-1}.

1. La figure 1 correspond au montage de principe d'un interféromètre de Michelson. Les miroirs sont réglés de telle façon que l'on observe des anneaux d'interférence circulaires sur l'écran E placé dans le plan focal de la lentille L, de distance focale image f'.

a) Quel est le rôle de la lame semi-réfléchissante SR ? Quel est celui de la lentille L ?

b) Montrer qu'avec ce montage la moitié du flux incident est irrémédiablement perdue.

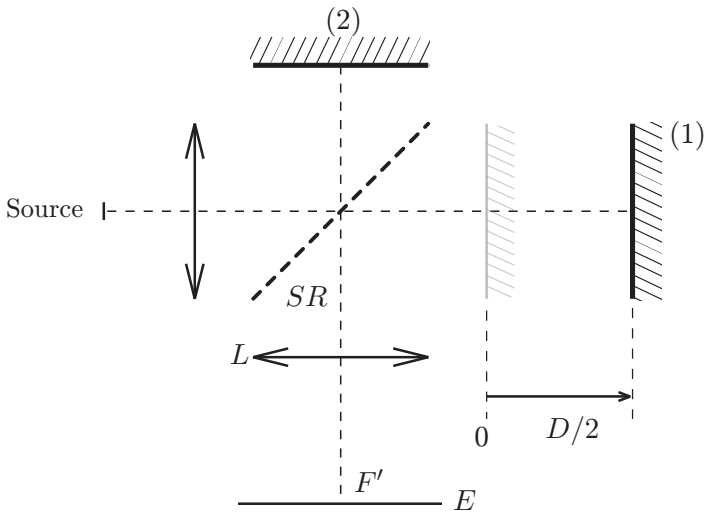


Figure 1

2. La différence de marche, différence entre les deux chemins optiques pour un rayon entrant perpendiculairement au miroir (1), est notée D ; pour un rayon entrant avec une inclinaison i, on rappelle que la différence de marche est alors donnée par $\delta = D\cos i$.

a) L'interféromètre est éclairé par une source étendue, supposée strictement monochromatique de nombre d'onde σ_0. On suppose la tache centrale en F' brillante. Exprimer le rayon r_1 du 1$^{\text{er}}$ anneau sombre, en fonction de σ_0, D et f'. Faire un schéma de ce que l'on observe sur l'écran.

b) La source est l'image d'une étoile, telle celle fournie par un télescope. Cette image est étalée par la diffraction mais surtout par la turbulence atmosphérique, ce qui donne des rayons entrant dans l'interféromètre d'inclinaisons diverses mais faibles. Quelle est la figure d'interférence observée en fonction de D en présence d'un filtre interférentiel qui sélectionne une très étroite bande passante autour d'un nombre d'onde σ_0 donné.

3. On éclaire l'interféromètre par une source monochromatique, de nombre d'onde σ_0. Un détecteur est placé au foyer F' de la lentille L. Ce détecteur délivre un signal $S(D)$, proportionnel à l'intensité lumineuse au point F'. Ce signal sera appelé dans la suite *interférogramme*. Il dépend de la différence de marche D.

a) Montrer que $S(D)$ est donné par : $S(D) = S_0(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D)$. Que représente S_0 ?

b) Quelle est la période de l'interférogramme ?

4. On illumine l'interféromètre par une source présentant un doublet de nombres d'onde σ_1 et σ_2 voisins. Chacune des raies est supposée monochromatique et leurs intensités sont égales.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

a) Déterminer l'expression de l'interférogramme $S(D)$ correspondant. Mettre en évidence deux périodes caractéristiques dans $S(D)$.

b) *Application numérique* : Représenter l'allure de l'interférogramme pour le doublet du sodium : $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm.

II - Interférogramme d'une raie élargie

1. On suppose maintenant que le profil spectral de la source n'est plus monochromatique mais possède une largeur $\Delta\sigma$. On désigne par I_σ l'intensité spectrale : dans l'intervalle $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ l'intensité émise est $I_\sigma\, d\sigma$. On admettra que les rayonnements correspondant à chaque intervalle de largeur $d\sigma$ sont incohérents. On notera I_0 l'intensité lumineuse totale de la raie. I_0 est donc donnée par la somme des intensités de chaque intervalle :

$$I_0 = \int_0^\infty I_\sigma\, d\sigma \ .$$

Dans la suite, on prend I_σ de la forme :

$$I_\sigma(\sigma) = \frac{I_0}{\Delta\sigma} \quad \text{si} \quad |\sigma - \sigma_0| \leqslant \frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$I_\sigma(\sigma) = 0 \qquad \text{si} \quad |\sigma - \sigma_0| > \frac{\Delta\sigma}{2} \ .$$

a) Montrer alors que le signal détecté est donné par : $S(D) = S_0(1 + v\cos 2\pi\sigma_0 D)$ et exprimer la fonction de visibilité des franges v en fonction de D et $\Delta\sigma$. Représenter schématiquement la fonction $v(D)$.

b) Quelle est la plus petite valeur $D_{\Delta\sigma}$ de D qui annule la fonction de visibilité ?

2. On illumine l'interféromètre avec une source stellaire via un filtre de bande passante $[\sigma_1, \sigma_2]$ sélectionnant une raie en absorption (figure 2). Cette raie d'absorption (profil grisé sur la figure 2) est suffisamment étroite pour être considérée comme monochromatique. On note I_c l'intensité totale au travers du filtre (sans absorption) et I_a l'intensité totale absorbée.

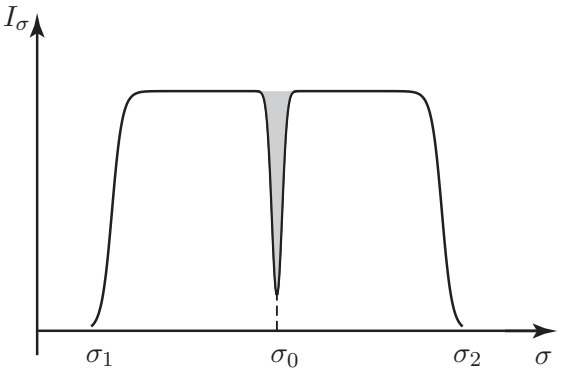


Figure 2

a) Montrer que, d'après la question précédente, on peut négliger dans le signal interférométrique tout terme interférentiel associé au spectre large délimité par le filtre si D est suffisamment grand, en supposant valables les résultats établis précédemment sur le profil de raie idéalisé.

b) En déduire que l'interférogramme s'écrit :

$$S(D) = S_c(1 + C\cos 2\pi\sigma_0 D)$$

où S_c est proportionnel à I_c. Exprimer le contraste de franges C en fonction de I_c et I_a.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

III - Élargissement et décalage possibles des raies spectrales. Évaluation de la différence de marche optimale

Une cause possible d'élargissement ou de décalage (en nombre d'onde) d'une raie spectrale est associée au mouvement relatif de la source et de l'observateur (effet Doppler). Soit ν_0 la fréquence d'émission d'une source au repos. Dans tout ce qui suit, lorsque la source (S) se déplace à la vitesse relative $\vec{V}$ par rapport à l'observateur (O), on *admettra* que celui-ci reçoit un rayonnement de fréquence ν donnée (pour $V/c \ll 1$) par :

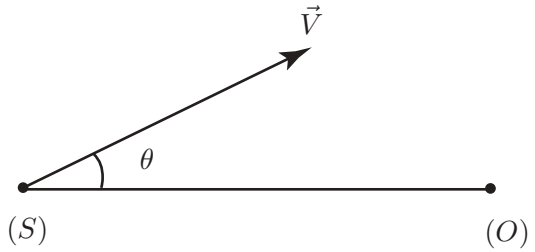


Figure 3

$$\nu - \nu_0 = \nu_0 \frac{V \cos\theta}{c}$$

où c est la vitesse de la lumière, $V = \|\vec{V}\|$ et θ l'angle entre la direction de propagation et $\vec{V}$ (figure 3). Nous examinons dans la suite diverses conséquences de cet effet Doppler sur l'interférogramme.

1. À la surface d'une étoile, les atomes (majoritairement de l'hydrogène) sont supposés former un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique de température T.

a) Quelle est la vitesse quadratique moyenne V_T d'un atome de cette étoile ?

b) La dispersion des vitesses entraîne par conséquent un élargissement $\Delta\sigma_K$ de la raie symétrique autour de la valeur σ_0. Donner l'ordre de grandeur de $\Delta\sigma_K$ en fonction de σ_0, V_T et c.

c) *Application numérique* : Évaluer $\Delta\sigma_K$ pour $T = 6000$ K et $\sigma_0 = 2 \times 10^6$ m^{-1}.

2. La rotation de l'étoile est aussi un paramètre dont il faut tenir compte. On note ψ l'angle entre la direction de visée et l'axe de rotation stellaire.

a) Pour quelle valeur de ψ l'influence de la rotation sur la largeur de raie sera-t-elle nulle ? maximale ? Dans ce dernier cas, expliquer qualitativement pourquoi la rotation de l'étoile, phénomène parfaitement déterminé, conduit à un élargissement de la raie d'émission analogue à celui associé aux mouvements erratiques des atomes et analysé dans la question précédente.

b) Toujours dans le cas d'une influence maximale de la rotation, évaluer la contribution de la rotation stellaire $\Delta\sigma_{\text{rot}}$ à la largeur de raie en fonction de la vitesse équatoriale de rotation V_{rot} de la surface de l'étoile. Pour quelle vitesse équatoriale de rotation ce dernier terme est-il comparable à $\Delta\sigma_K$?

c) *Application numérique* : dans ce dernier cas, calculer V_{rot} pour une étoile dont la température de surface est $T_s = 6000$ K.

3. On désire utiliser l'interféromètre comme sismomètre pour détecter les mouvements oscil-

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

latoires de la surface stellaire. Une oscillation sismique est assimilée à une variation $\Delta v(t)$ de la vitesse apparente vers l'observateur de l'ensemble de la couche externe de l'étoile. On suppose cette variation sinusoïdale, d'amplitude ΔV, de pulsation ω. Le spectre d'émission et d'absorption de l'étoile est celui de la question **II.2**. Cette utilisation ne requiert que l'enregistrement de l'interférogramme pour une valeur optimisée de la différence de marche notée D_0. En l'absence de signal sismique, l'interférogramme est $S(D_0)$ de **II.2.b)**.

a) Montrer qu'à l'instant t, l'interférogramme peut être mis sous la forme :

$$S(D_0) = S_c[1 + C\cos(2\pi\sigma_0 D_0 + \varphi)]$$

où φ est le déphasage de l'interférogramme donné par l'expression :

$$\varphi = 2\pi\sigma_0 D_0 \frac{\Delta v(t)}{c} \ .$$

b) Montrer que cette relation implique, pour une détection optimale, le choix d'une différence de marche D_0 la plus grande possible. Comparer cette nouvelle condition à celle trouvée à la question **II.1** et en déduire un ordre de grandeur de la différence de marche optimale pour une étoile de température T_0, en supposant négligeables les effets de rotation.

c) Montrer alors que le principe instrumental conduit à mesurer un déphasage φ d'amplitude de l'ordre de $\dfrac{\Delta V}{V_T}$.

4. Au décalage Doppler sismique du spectre stellaire, enregistré sur une nuit entière, se superposent diverses contributions. Estimer succinctement l'influence du mouvement de rotation de la Terre pour une observation menée dans un observatoire situé à la latitude λ. L'amplitude et la pulsation de l'oscillation sismique sont typiquement de l'ordre de 10 cm s^{-1} et 10^{-2} rad s^{-1}.

IV - Amélioration du montage interférométrique

1. Un montage plus efficace que le montage de principe de type Michelson est proposé sur la figure 4. Il reçoit un faisceau de lumière parallèle monochromatique. Il permet de récupérer le flux total incident en utilisant deux détecteurs placés aux deux sorties possibles des faisceaux qui interfèrent.

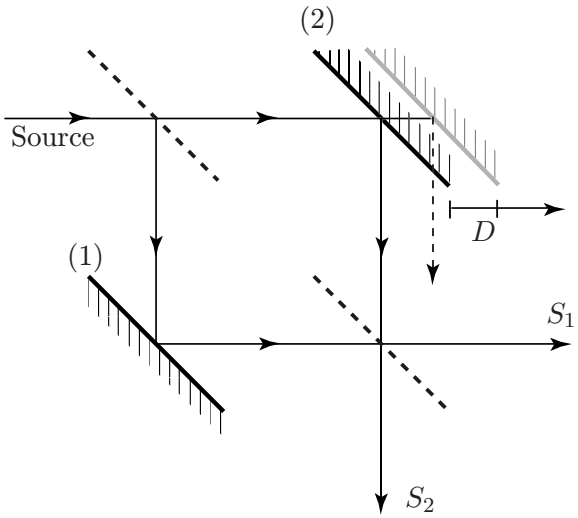


Figure 4

a) On suppose que le premier détecteur délivre un interférogramme :

$$S_1 = \frac{S_0}{2}(1 + C\cos\psi) \ .$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

En admettant que les pertes d'énergie lumineuse dans l'appareil sont négligeables, déduire la forme de l'interférogramme S_2 délivré par le second détecteur.

b) Montrer comment une combinaison de S_1 et de S_2 permet d'avoir directement accès au terme de modulation interférométrique $C\cos\psi$.

c) Montrer que la recombinaison géométrique des faisceaux sur la deuxième lame semi-réfléchissante suppose la symétrie du montage, et donc une observation à différence de marche nulle. Cela est-il intéressant pour l'observation sismique stellaire discutée plus haut ?

2. On interpose, contre l'un des miroirs, une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur uniforme e et d'indice n (figure 5).

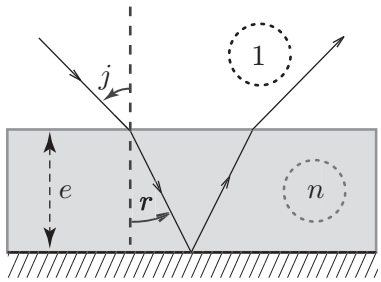


Figure 5

a) Montrer que, pour une incidence j correspondant à un rayon réfracté repéré par l'angle r, la lame introduit une différence de marche qui s'exprime par :

$$D = \frac{2e}{\cos r}\left(n - \frac{1}{n}\right) .$$

b) *Application numérique* : On cherche à imposer une différence de marche de 0,8 cm. Calculer l'épaisseur e de la lame pour un verre d'indice $n = 1,55$ et un angle d'incidence j de 45°.

c) Par un schéma, montrer que ce montage optique permet alors la recombinaison exacte des faisceaux sur la 2^{e} lame réfléchissante, tout en assurant une différence de marche non nulle.

V - Effet de la turbulence atmosphérique

1. L'interféromètre reçoit le flux d'une étoile, objet à l'infini, collecté par un télescope. On suppose le système optique du collecteur équivalent au montage de la figure 6. Ce montage est dit afocal : le foyer image de L_1 est confondu avec le foyer objet de L_2. La lentille L_1 représente le miroir primaire du télescope, de diamètre a. La lentille L_2 alimente l'interféromètre : le flux issu de L_2 est divisé par la première lame semi-réfléchissante de la figure 4.

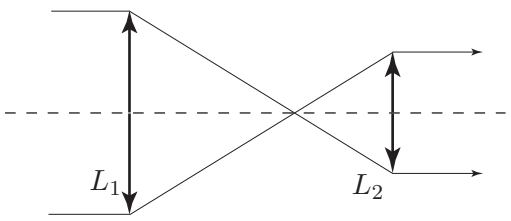


Figure 6

a) Justifier l'intérêt de ce montage afocal pour alimenter l'interféromètre.

b) Exprimer le grandissement angulaire G en fonction des distances focales images f'_1 et f'_2 des lentilles L_1 et L_2.

c) Déterminer la taille b du faisceau en sortie du collecteur, en fonction de G et du diamètre

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

a du collecteur. En déduire le diamètre minimal des pièces optiques de l'interféromètre. Le calculer pour $a = 3,30$ m et $G = 165$.

2. La tache image de l'étoile n'est en fait ni limitée par la seule diffraction du collecteur, ni stable. La turbulence de l'atmosphère terrestre dévie et étale le faisceau stellaire incident. On s'intéresse principalement à la déviation atmosphérique du faisceau incident, notée i_0, et l'on suppose la source toujours ponctuelle.

a) Déterminer l'angle i sous lequel l'interféromètre voit les rayons d'une source stellaire, en fonction de i_0 et du grossissement G (grandissement angulaire) du télescope collecteur de lumière.

b) Estimer la différence de marche $D(i)$, en fonction de la différence de marche sous incidence nulle D_0 et de l'angle i.

c) Exprimer la condition sur l'inclinaison maximale admissible dans l'instrument, pour que les fluctuations en différence de marche restent inférieures à une fraction α de longueur d'onde.

d) *Application numérique* : On fixe α au plus égal à 5% ; pour des conditions de turbulence moyenne $i_0 = 1''$; on donne $D_0 = 0,8$ cm et $\sigma_0 = 2 \times 10^6$ m^{-1}. Estimer le grossissement G maximal.

3.a) Montrer que la turbulence conduit à une mesure de vitesse parasite δv telle que :

$$\frac{\delta v}{c} = \frac{1}{2} i^2 \, .$$

b) *Application numérique* : Calculer δv pour $i_0 = 1''$, et un grossissement G égal à 165. L'instrument est conçu pour la mesure de vitesses sismiques dont l'amplitude est de l'ordre de 10 cm s^{-1}. Est-il nécessaire de prévoir, pour alimenter l'interféromètre, un dispositif corrigeant les fluctuations dues à la turbulence atmosphérique ?

* *
*

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

Rapport de MM. T. MELIN et B. MOSSER, correcteurs.

Le sujet proposé cette année traitait du principe instrumental d'un détecteur dédié à l'astérosismologie. Il abordait également quelques dimensionnements simples. Le problème, plutôt long mais sans grande difficulté, balayait un large éventail de notions d'optique géométrique et d'optique physique.

Le barème du problème a été conçu de façon à privilégier les questions qualitatives, où les candidats peuvent faire preuve de sens physique, qui doit nécessairement compléter la connaissance du cours et l'aptitude technique à résoudre un problème.

La moyenne des notes de cette épreuve est de 10,4, avec un écart-type de 3,2. Les notes des candidats français du concours se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	3%
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	20%
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	44%
$12 \leq \mathrm{N} < 16$	29%
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	4%

La relative facilité du sujet a entrainé un faible nombre de notes très faibles, et le poids du barème accordé aux questions qualitatives a exclu une proportion élevée de notes excellentes. Il est souvent arrivé qu'un candidat obtienne quasiment le maximum de points à l'une ou l'autre des cinq parties. Nous remercions les candidats d'avoir traité le problème séquentiellement, en évitant ainsi une pêche aléatoire de points au fil de l'énoncé, qui s'avérait plutôt malheureuse le cas échéant.

Notons enfin que, d'une manière générale, de nombreux candidats négligent les questions qualitatives, de même que les applications numériques ou les tracés de schémas. Cette tendance se vérifie également dans le cas des bonnes copies, ce qui fait que ces questions deviennent naturellement assez sélectives dans le barème.

Partie I

1a) Le rôle de la division du faisceau par la lame semi-réfléchissante a bien été mis en évidence, mais pas celui de la recombinaison des deux faisceaux par la lentille L. La cohérence des deux sous-faisceaux a été assez rarement soulignée.

1b) Cette question a souvent été très clairement traitée avec un schéma précis accompagné d'une brève légende, et beaucoup moins bien lorsque les candidats se sont aventurés dans la rédaction d'un long texte obscur.

2a) Lire l'énoncé avant de se lancer dans les calculs (ou de reproduire un calcul-type vu en cours ou en exercices d'application du cours) est indispensable ! Plus d'un tiers des

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

étudiants ont considéré, à tort, que l'on se plaçait juste au voisinage de la teinte plate ; d'autres encore ont calculé le rayon r_1 de la première frange brillante, alors que l'énoncé demandait le rayon du premier anneau sombre. On peut également déplorer le manque d'annotations du schéma demandé.

2b) Cette question n'a pas été bien traitéee, en raison encore d'une lecture bien trop incomplète de l'énoncé. Il s'agissait d'étudier le phénomène en fonction du paramètre D, et donc de la position relative des miroirs, et non en fonction du rayon r_1 ...

3b) Entre les propositions « la fonction est $1/\sigma_0$ périodique » et « la période de l'interférogramme est la longueur d'onde » nous vous laissons choisir laquelle nous préférons (et donc laquelle rapporte le plus de points).

4a) Si cette question a été relativement bien traitée en ce qui concerne le calcul, trop de candidats oublient de justifier pourquoi ils somment ici des intensités lumineuses. Une telle étape de raisonnement faisait bien sûr partie intégrante du barème.

4b) Une question facile (*i.e.* une application numérique et un schéma) qui a été plutôt survolée que bien traitée, et ce, même par de très bonnes copies. Rappelons que l'énoncé précisait qu'« un soin tout particulier doit être apporté aux applications numériques », ce qui sous-entend que de telles questions sont valorisées dans le barème.

Partie II

1a) et 1b) Ces questions ont été en moyenne bien abordées.

2a) L'idée à mettre en évidence, à savoir que l'on veut étudier la signature interférométrique du signal et non celle du filtre sélectionnant ce signal n'a été que très rarement comprise.

2b) cf remarque du I2a) : trop d'élèves proposent abruptement au correcteur des formules de contraste de franges C issues d'exercices classiques d'application de cours, ... mais qui n'étaient malheureusement pas en adéquation avec le problème de ce concours.

Partie III

1a) Question de cours, traitée approximativement, sans justifier des degrés de liberté du système. Un certain nombre de copies confondent en situation de concours la vitesse quadratique moyenne avec le carré de celle-ci.

1b) et 1c) Questions bien traitées, hormis quelques copies qui s'affranchissent de fournir une unité physique à $\Delta\sigma_K$ lors de l'application numérique.

2a) Ce genre de question, où la géométrie joue un rôle important, ne peut se passer d'un schéma clair. La discussion comparative entre l'élargissement thermique de raie et

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.

l'élargissement dû à la rotation de l'étoile est restée assez évasive en général.

2b) et 2c) L'application numérique, forcément non unique vu que seul un ordre de grandeur était demandé, se devait d'être cohérente avec ce qui précède.

3a) Retrouver un résultat donné n'apporte guère de points, sauf à avoir posé proprement les bases qui justifient le résultat. Ici, bon nombre d'étudiants ont retrouvé le résultat en considérant comme variable la différence de marche, et en figeant le signal sismique, c'est-à-dire en traitant un calcul sans aucune considération pour le problème physique.

3b) Une erreur courante était de vouloir annuler le signal interférométrique ... et donc d'annuler la pertinence de l'instrument.

4) Il s'agissait dans cette question de comparer deux signaux : le signal sismique faible mais rapide par rapport à la perturbation importante mais lente due à la rotation de la Terre. Quelques étudiants ont pu mettre à profit leur compréhension de l'analyse de Fourier pour apporter de très pertinents éléments de réponse. Le barème prévoyait là, comme à d'autres questions sensibles, la possibilité de gain de points.

Partie IV

1a) Que les optiques soient idéales ou réelles, l'énergie du signal incident ne peut pas se retrouver à la fois sur les deux voies. Une majorité de copies arrive finalement à cette conclusion, mais cette question simple a surpris bon nombre de candidats.

1b) Expérimentalement, S_1 et S_2 sont les seules quantités mesurées. Avoir accès *directement* au terme de modulation nécessite donc de s'affranchir du terme énergétique S_0, présent dans une grande partie des réponses à cette question, et donc de l'exprimer en fonction de S_1 et S_2, comme le demandait explicitement l'énoncé.

1c) $D = 0$ annule le terme interférométrique.

2a) Cette question était la seule vraiment difficile de l'énoncé, car il fallait réfléchir au cadre conceptuel en s'appuyant sur le contexte créé par la question précédente. La question 2c) permettait éventuellement de recadrer le problème. Plusieurs types de réponses ont été apportés :

- réponse juste et comprise
- traitement correct d'une étude de différence de marche posée proprement, mais n'aboutissant pas au résultat demandé, avec un questionnement légitime du candidat : ceci entrainait un gain de points en fonction des éléments donnés.
- traitement incorrect pour retrouver coûte que coûte le résultat. Les efforts déployés pour masquer l'escroquerie ont été sévèrement sanctionnés. Que penser des candidats - nombreux ! - qui en arrivent à proclamer que « $\cos i = n \cos r$ », alors que partout ailleurs ils se sont appuyés sur la relation de Snell-Descartes correctement énoncée.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 26 pages.