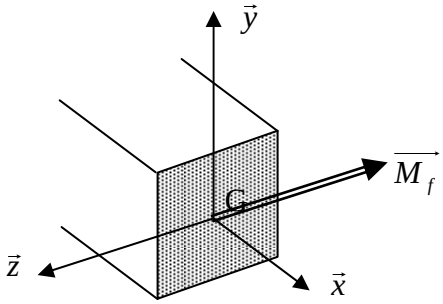
RESISTANCE DES MATERIAUX
FLEXION PLANE SIMPLE

1. DEFINITION

1.1. Flexion pure

Le **système de forces extérieures** appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un plan confondu avec un plan de symétrie de la poutre.

Le torseur de cohésion de la section doit pouvoir se réduire à un moment de flexion suivant un des axes de symétrie de la section droite ($\vec{z}$ ci-contre)

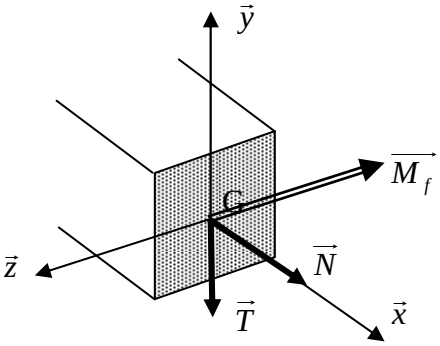


Soit : $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

1.2. Flexion plane

Le **système de forces extérieures** appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un plan confondu avec un plan de symétrie de la poutre.

Si le plan des forces est $(G,\vec{x},\vec{y})$, le torseur de cohésion de la section en flexion plane doit pouvoir se mettre sous la forme :

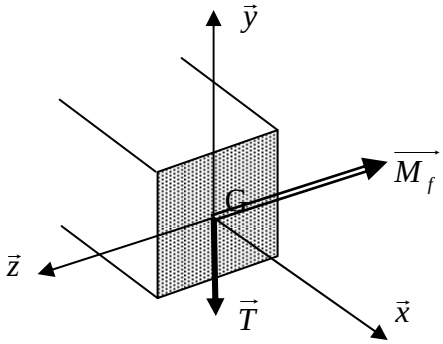


Soit : $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

1.3. Flexion plane simple

La ligne moyenne de la poutre est droite.

Le **système de forces extérieures** appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un plan confondu avec un plan de symétrie de la poutre. Toutes **les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre**



 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

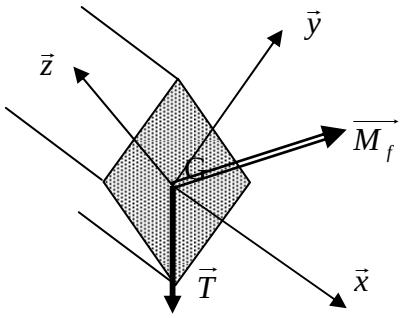
Si les forces sont suivant $\vec{y}$ et la ligne moyenne suivant $\vec{x}$ le torseur de cohésion de la section en flexion plane doit pouvoir se mettre sous la forme :

$$\text{Soit : } \{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

1.4. Flexion déviée (pour information car Hors Programme)

La ligne moyenne de la poutre est droite.

Le **système de forces extérieures** appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un ***plan qui n'est plus confondu avec un plan de symétrie*** de la poutre. Toutes **les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre**



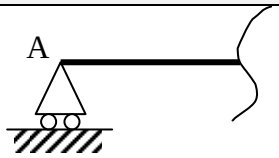
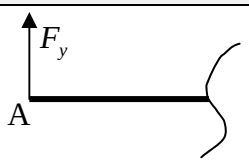
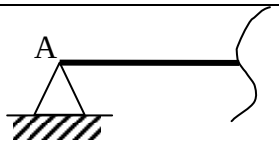
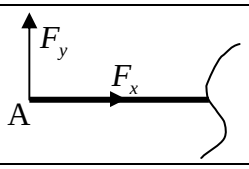
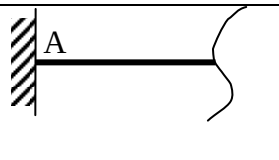
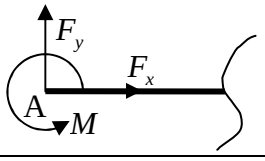
Le torseur de cohésion de la section droite de normale $\vec{x}$, sollicitée en flexion déviée est de la forme :

$$\text{Soit : } \{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

2. MODELISATION ET SYMBOLE DES ACTIONS MECANIQUES

Les poutres sont bien sûr en liaison avec d'autres solides et on adopte pour les différents types de liaison des symboles propres à la RdM ainsi que la plupart du temps une modélisation plane des actions mécaniques.

Les symboles usuels ainsi que leur modélisation sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Type	Exemples de liaison	Schématisation usuelle	Action mécanique de liaison	Torseur associé
Appui simple	Liaisons sphère cylindre ou sphère plan			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Articulation	Liaison pivot ou sphérique			$\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Encastrement	Liaison encastrement			$\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Exemple : Cas des arbres guidés en rotation par des roulements :

- Pour les roulements montés serrés et arrêtés axialement, la modélisation est alors une rotule, c'est à dire une sphérique.

Le fait que toutes les forces soient dans le plan $(\vec{x},\vec{y})$ revient à adopter la modélisation :

$\left\{\begin{matrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, ce qui devient dans le plan $(\vec{x},\vec{y})$: $\left\{\begin{matrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ \cancel{F_z} & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$,

soit la même forme qu'une pivot d'axe $(A\vec{z})$ dans la plan $(\vec{x},\vec{y})$:

$$\left\{\begin{matrix} F_x & \cancel{M_x} \\ F_y & \cancel{M_y} \\ \cancel{F_z} & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Soit : Sphérique = Pivot = Articulation en RdM

- Pour les roulements montés glissants et non arrêtés axialement, la modélisation est alors une linéaire annulaire, c'est à dire une sphère - cylindre.

Le fait que toutes les forces soient dans le plan $(\vec{x},\vec{y})$ revient à adopter la modélisation :

Sphère cylindre de direction $\vec{x}$: $\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, ce qui devient dans le plan $(\vec{x},\vec{y})$:

$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ \cancel{F_z} & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, soit la même forme qu'une ponctuelle (sphère plan) de normale $(A,\vec{y})$ dans la plan $(\vec{x},\vec{y})$: $\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Soit : Sphère - Cylindre = Sphère - plan = Appui simple en RdM

3. ETUDE EXPERIMENTALE

3.1. Essai

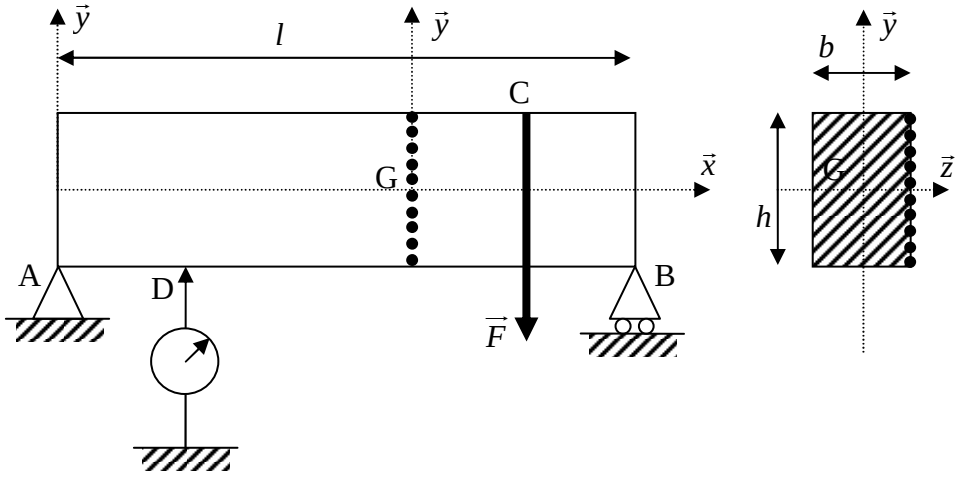
On sollicite une poutre en flexion plane simple : voir le protocole ci-dessous.

On mesure les déformations relatives $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ sur le coté d'une section droite à l'aide de jauges de contraintes et la loi de HOOKE $(\sigma = E\varepsilon)$ permet ensuite de relier les déformations mesurée aux contraintes s'exerçant dans la poutre.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

On place en plus un comparateur en D afin de mesurer la flèche de la poutre

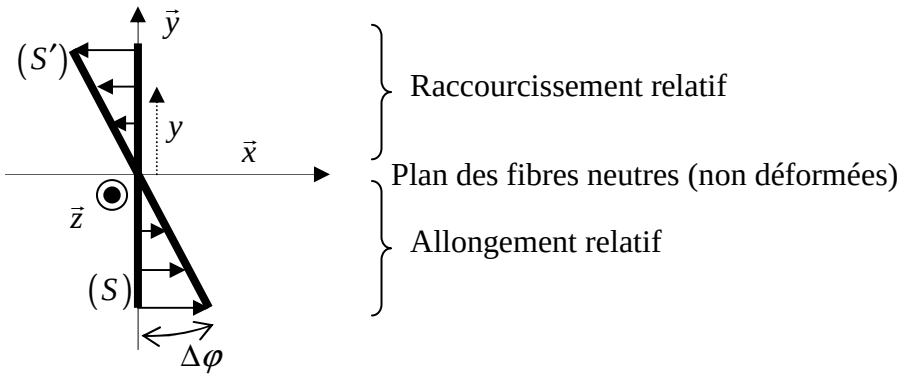


3.2. Résultats expérimentaux

Constatations sur la flèche (déplacement vertical) en D :

- La flèche en D est proportionnelle à l'intensité de la force exercée F. Elle augmente lorsque l'on éloigne C (point d'application de cette force) des appuis A et B de la poutre et est maximale lorsque C est au milieu de AB.
- La Flèche en D diminue si l'on remplace la force concentrée F en C par une action mécanique répartie modélisable par le même torseur d'action mécanique que la force concentrée : $\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{C \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$
- La flèche en D est inversement proportionnelle au moment quadratique $I_{G\vec{z}}$. Il faut pour cela procéder à plusieurs essais avec des poutres où seule la quantité b est changée. (En effet, pour une poutre à section rectangulaire, $I_{G\vec{z}} = \frac{bh^3}{12}$)

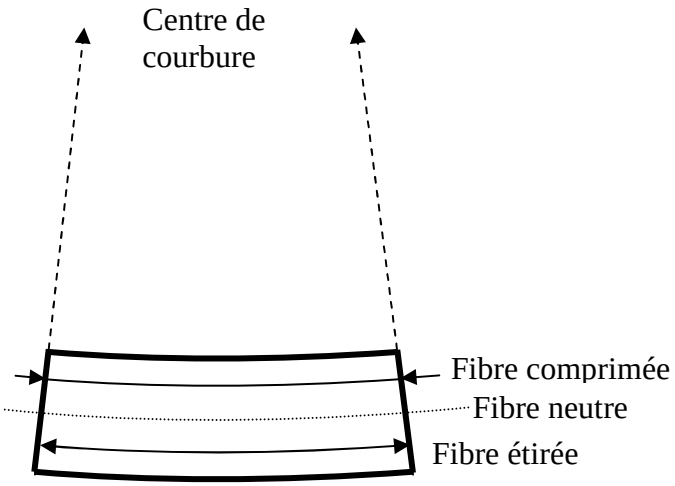
Etude des déformations longitudinales $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ données par les jauges de déformations :



Tout se passe comme si la section droite avait pivotée d'un angle $\Delta\varphi$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

- Les fibres au dessus de la ligne moyenne sont ici comprimées
- Les fibres en dessous de la ligne moyenne sont ici étirées
- Les fibres s'allongent ou se raccourcissent proportionnellement à leur distance par rapport à la ligne moyenne.
- La ligne moyenne est la fibre neutre



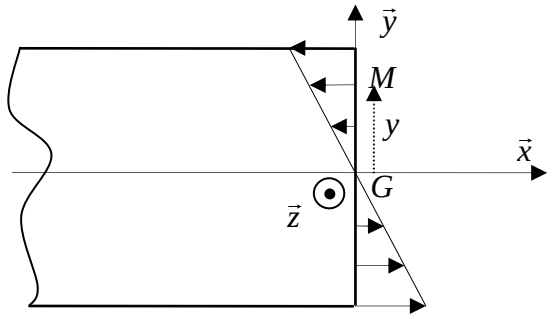
On en conclut donc que $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = ky$

4. REPARTITION DES CONTRAINTES

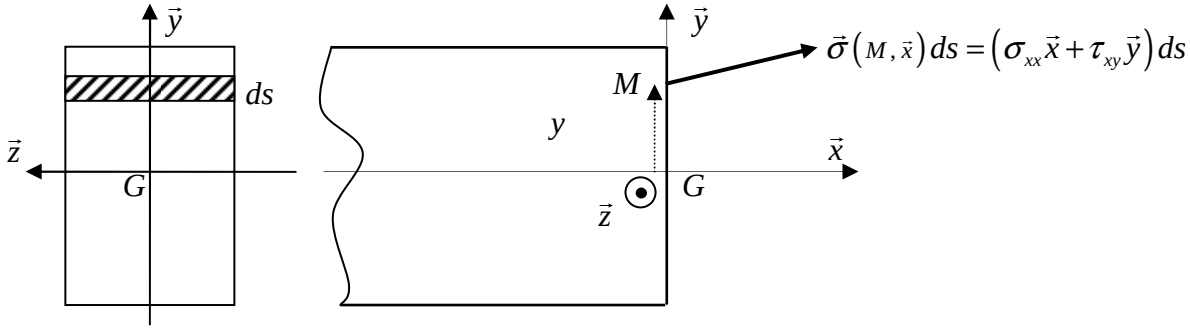
4.1. Contraintes normales

On vient de voir que $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_x = ky$, or d'après la loi de HOOKE reliant déformations et contrainte, on sait que $\sigma_x = E\varepsilon_x$, le champ des contraintes est donc linéaire en y : $\boxed{\sigma_x = kEy}$

Les contraintes normales sont donc proportionnelles à leur distance par rapport au plan contenant les fibres moyennes, qui dans le cas de la flexion plane sont aussi les fibres neutres :
$\sigma_x = 0$, pas de contraintes normales pour $y = 0$, plan des fibres moyennes.



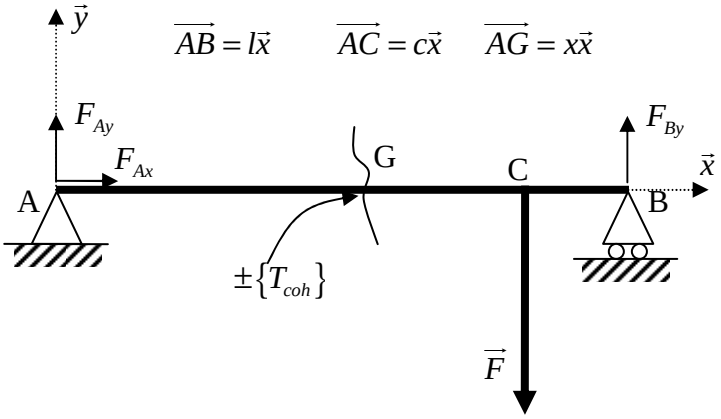
4.2. Relation entre σ_x et M_{fz}



 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

La poutre étant en flexion plane simple :



Calcul des réactions aux appuis :

L'équilibre de la poutre en A s'écrit : $\left\{\begin{matrix} F_{Ax} & 0 \\ F_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F_{By} & 0 \\ 0 & lF_{By} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -cF \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_A$

Ce qui se résout en $\begin{cases} F_{Ax} = 0 \\ F_{Ay} = \dfrac{(l-c)F}{l} \\ F_{By} = \dfrac{cF}{l} \end{cases}$

Calcul du torseur de cohésion :

Tronçon AC :

Si l'on conserve la partie gauche, l'équilibre de cette partie droite s'écrit :

$$\left\{\begin{matrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix}\right\}_G + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \dfrac{(l-c)F}{l} & 0 \\ 0 & -x\dfrac{(l-c)F}{l} \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_G$$

Soit : $\left\{\begin{matrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{(l-c)F}{l} & 0 \\ 0 & x\dfrac{(l-c)F}{l} \end{matrix}\right\}_G$, ce qui est bien de la forme $\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{matrix}\right\}_G$ donc un cas de flexion plane simple.

Tronçon CB :

Si l'on conserve la partie droite, l'équilibre de cette partie droite s'écrit :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$-\underset{G}{\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}} + \underset{G}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cF}{l} & 0 \\ 0 & (l-x)\frac{cF}{l} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}$$

Soit : $\underset{G}{\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cF}{l} & 0 \\ 0 & (l-x)\frac{cF}{l} \end{Bmatrix}}$, ce qui est bien de la forme $\underset{G}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}}$ donc bien un cas de flexion plane simple.

Le torseur de cohésion est donc bien de la forme $\{T_{coh}\} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{coh} \\ \vec{M}_{coh} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}}$, soit

$\vec{R}_{coh} = T_y\ \vec{y}$ et $\vec{M}_{coh} = M_{fz}\ \vec{z}$

Or le torseur de cohésion n'étant ni plus ni moins que l'intégrale sur toute la section droite des efforts surfacique de cohésion, $d\vec{f}_M = \vec{\sigma}(M,\vec{x})\,ds = (\sigma_{xx}\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y})\,ds$:

Ce qui donne pour la résultante du torseur de cohésion :

$\vec{R}_{coh} = T_y\ \vec{y} = \int \vec{\sigma}(M,\vec{x})\,ds = \int\limits_{\forall M \in S} (\sigma_{xx}\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y})\,ds$. Etant donné que l'on a choisi $ds = b\,dy$, on obtient :

En projection sur $\vec{x}$: $0 = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} b\,dy = bkE \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\,dy = bkE\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$. On constate donc bien que le champ de contrainte normale observé sur l'essai (proportionnel à y) est conforme à la forme du torseur de cohésion !!!

En projection sur $\vec{y}$: $T_y = \int \tau_{xy} ds$.

Et pour le moment du torseur de cohésion :

$\vec{M}_{coh} = M_{fz}\ \vec{z} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\sigma}(M,\vec{x})\,ds = \int\limits_{\forall M \in S} \underbrace{(y\vec{y} + z\vec{z})}_{\overrightarrow{GM}} \wedge (\sigma_{xx}\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y})\,ds$. Avec ici $ds = dy\,dz$, on obtient : $M_{fz}\ \vec{z} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-y\sigma_{xx}\vec{z} - z\tau_{xy}\vec{x} + z\sigma_{xx}\vec{y})\,dydz$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.