ESC Lyon 1999 Voie Eco

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1. Calculer w_0 et w_1.
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. Montrer, pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer : $w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t \, dt$. En déduire : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.
5. Montrer pour tout entier naturel n, en utilisant **2.** Et **4.** : $0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$. En déduire : $w_{n+1} \sim_{n\to+\infty} w_n$.
6. Montrer, en utilisant **4.** , que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. En déduire : $w_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 2

On considère les éléments suivants de $\mathbf{M_3(R)}$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.a. Justifier (sans calcul) que J est diagonalisable, que J n'est pas inversible, et que 0 est valeur proprede J.
b. Calculer J^2 et exprimer J^2 en fonction de I et K.
2.a. Calculer les valeurs propres de J et déterminer une base de $\mathbf{M_{3,1}(R)}$ formée de vecteurs propres pour J. En déduire que $P^{-1} J P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
b. Montrer, en utilisant **1.b** et **2.a**, que $P^{-1} K P$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. On considère l'élément suivant de $\mathbf{M_3(R)}$: $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$

a. Montrer que M s'exprime simplement en fonction de I, J, K et a, b, c.

b. En déduire que P^{-1} M P est une matrice diagonale que l'on explicitera.

4. Trouver une matrice X de $\mathbf{M_3(R)}$ telle que : $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

La lettre c désigne un entier naturel non nul fixé. Une urne contient initialement des boules blanches et de boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, c boules de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges, où b et r sont des entiers naturels non nuls.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule banche au premier tirage ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule banche au deuxième tirage ?

c. Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été banche ?

2. Pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on note $u_n(x,y)$ la probabilité d'obtenir d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.

a. Montrer, en utilisant un système complet d'événements associé au premier tirage, que, pour tous entiers naturels non nuls x, y, z, on a : $u_{n+1}(x,y) = u_n(x + c , y)\dfrac{x}{x+y} + u_n(x , y + c) \dfrac{y}{x+y}$.

b. En déduire, par récurrence, que, pour tous entiers naturels non nuls n, x, y, on a :

$u_n(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$.

3. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement exactement une boule blanche et une boule rouge et que c = 1. Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

a. Déterminer la loi de X_1.

b.Déterminer la loi de X_2.

c.Montrer, par récurrence, que X_n suit une loi uniforme dont on donnera l'espérance et la variance.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1999

EM-LYON : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–II

QUESTION–1

1–a)

La matrice J est **symétrique réelle, donc elle est diagonalisable**.

J n'est pas inversible car elle a deux lignes égales (si l'on effectuait $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, on obtiendrait une ligne de 0).

Dire que J n'est pas inversible c'est dire que 0 est valeur propre de J.

1–b)

$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + K.$

$$\boxed{J^2 = I + K.}$$

QUESTION–2

2–a)

• **λ valeur propre de J si et seulement si la matrice $J - \lambda I$ n'est pas inversible.**

$J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$

On permute L_2 et L_1 puis L_2 et L_3 ; on obtient alors la matrice équivalente

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On effectue $L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_1$. Ce qui donne

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ et pour finir $L_3 \longleftarrow L_3 + (\lambda^2 - 1)L_2$. Cela donne

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda^2 - 2) \end{pmatrix}.$

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } J \text{ si et seulement si } \lambda \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}.}$$