www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option économique

MATHEMATIQUES III

Mardi 9 Mai 2000 de 8h à 12h

LES ANNALES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1 (Fonction de production de Cobb-Douglas)

Une entreprise produit des biens B dont la fabrication nécessite :
- un certain volume d'heures de travail, désigné par x dans la suite (avec $x > 0$).
- un certain volume d'équipements, désigné par y dans la suite (avec $y > 0$).

On suppose que la quantité de biens B produits avec un volume d'heures de travail égal à x et un volume d'équipements égal à y est :

$$f(x, y) = x^a y^b$$

où a, b désignent deux nombres réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On suppose enfin le coût horaire du travail égal à u et le coût unitaire des équipements égal à v de sorte que le coût de la production à volumes de travail et d'équipements x et y donnés est :

$$g(x, y) = ux+vy.$$

1°) Rendement d'échelle $a+b$

On multiplie par une même constante $\lambda > 0$ le volume x des heures de travail et le volume y des équipements. Par quel facteur est multipliée la quantité produite ?
Comment interpréter économiquement la position du nombre $a+b$ par rapport à 1?

2°) Etude d'un cas particulier

On suppose dans cette question (et seulement dans celle-ci) que $a = b = 1/2$ et $u = 4$, $v = 1$.

a) Vérifier que l'ensemble des points (x, y) avec $x > 0$, $y > 0$ tels que $f(x, y) = 2$ est la courbe d'équation $y = 4/x$.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 4/x$ au point d'abscisse 1.
c) Construire sur une même figure (unité 2 cm) les ensembles des points (x, y) tels que :
- $x > 0, y > 0$ et $f(x, y) = 2$.
- $x > 0, y > 0$ et $g(x, y) = 8$.
- $x > 0, y > 0$ et $g(x, y) = 10$.

Déterminer les points d'intersection du premier de ces ensembles avec les deux suivants et donner une interprétation de ces points en termes de production et de coût de production.
d) Répondre aux deux questions suivantes en justifiant graphiquement votre raisonnement :
- Pour une production égale à 2, quel est le coût minimal K envisageable?
- Pour un coût égal à 8, quelle est la quantité produite maximale Q envisageable?

3°) Optimisation de la quantité produite à niveau de coût donné

On étudie dans cette question la maximisation de la quantité produite $Q = f(x, y)$ en supposant que le coût de production $K = g(x, y)$ est donné.
Autrement dit, on cherche à maximiser $Q = f(x, y)$ sous la contrainte de coût $K = g(x, y)$.
a) Montrer que ce problème équivaut à maximiser la fonction de la variable x définie par :

$$F(x) = f(x, \frac{K - ux}{v}) \text{ avec } 0 < x < K/u.$$

b) Calculer $F'(x)$ et montrer que $F'(x)$ est du signe de $Ka-(a+b)ux$.
c) En déduire les variations de la fonction F et les valeurs de x et y qui permettent d'optimiser la quantité produite $Q = f(x, y)$ sous la contrainte de coût $g(x, y) = K$.
d) En déduire que la quantité produite optimale Q pouvant être obtenue sous la contrainte de coût $g(x, y) = K$ est de la forme $Q = cK^{a+b}$ où c est une constante dépendant de a, b, u, v que l'on explicitera.
On précisera la forme particulière du résultat obtenu lorsque $a+b = 1$.

4°) Optimisation du coût à niveau de production donné

On étudie dans cette question la minimisation du coût de production $K = g(x, y)$ en supposant que la quantité à produire $Q = f(x, y)$ est donnée.
Autrement dit, on cherche à minimiser $K = g(x, y)$ sous la contrainte de production $Q = f(x, y)$.
a) Montrer que ce problème équivaut à minimiser la fonction de la variable x définie par :

$$G(x) = g(x, \frac{Q^{1/b}}{x^{a/b}}) \text{ avec } x > 0.$$

b) Déterminer $G'(x)$, en déduire les variations de la fonction G et les valeurs de x et y qui permettent d'optimiser le coût de production $K = g(x, y)$ sous la contrainte $Q = f(x, y)$.
c) En déduire que le coût optimal K pouvant être obtenu sous la contrainte de production $Q = f(x, y)$ est de la forme $K = dQ^{1/(a+b)}$ où d est une constante dépendant de a, b, u, v que l'on explicitera.
On précisera la forme particulière du résultat obtenu lorsque $a+b = 1$.
d) Comparer à l'expression de Q en fonction de K obtenue à la fin de la question 3°. Conclure.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

LES ANNALES

EXERCICE 2 *(Formule de Stirling)*

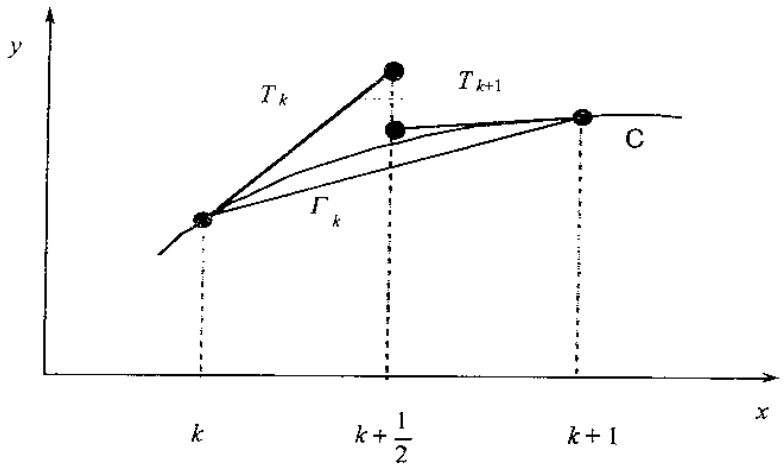
L'objet de l'exercice est d'établir la formule de Stirling (*James Stirling*, mathématicien écossais, 1692-1770), qui donne un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie I

1°) Calculer pour tout nombre entier $n \geq 1$ l'intégrale $I_n = \int_1^n \ln(t)dt$ en fonction de n.

2°) On étudie ici un encadrement de l'intégrale I_n à l'aide de considérations géométriques.
A cet effet, on désigne par k un nombre entier naturel non nul et on considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé :
- la courbe représentative C de la fonction ln (logarithme népérien).
- le segment Γ_k dont les extrémités sont les points de C d'abscisses k et $k+1$.
- la tangente T_k à la courbe C au point d'abscisse k.

a) Justifier les positions relatives de la courbe C par rapport à Γ_k, T_k et T_{k+1} qui sont mises en évidence sur le graphique ci-dessous.



b) En calculant l'aire des différents domaines intervenant dans la figure ci-dessus (on pourra utiliser avec profit la formule donnant l'aire d'un trapèze), établir l'encadrement suivant pour tout nombre entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{2}(\ln(k)+\ln(k+1)) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt \leq \frac{1}{2}(\ln(k)+\ln(k+1)) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

c) En déduire pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$\ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) \leq I_n \leq \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

d) On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n).$$

Montrer que la suite $(I_n - u_n)$ est croissante, majorée par 1/8, donc convergente.

e) On considère le nombre réel L qui est limite de la suite $(I_n - u_n)$.
Déduire de l'ensemble des questions précédentes que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n\, n!} = e^{L-1} \quad \text{et} \quad n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\, e^{1-L}.$$

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

Partie II

Le but de cette partie est de calculer la valeur du nombre $K = e^{1-L}$ afin d'en déduire la formule de Stirling. On pose à cet effet pour tout nombre entier naturel n :

$$w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$$

1°) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout nombre entier naturel n :

$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\cos^2(t)dt$$

En déduire que $(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$, puis que $w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

2°) On se propose de déterminer un équivalent de w_n quand n tend vers $+\infty$.

a) Etablir l'inégalité $w_{n+2} \leq w_{n+1} \leq w_n$ et en déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{n+1}{n+2}w_n \leq w_{n+1} \leq w_n.$$

Montrer alors que w_{n+1} est équivalent à w_n quand n tend vers $+\infty$.

b) Etablir que la suite $((n+1)w_{n+1}w_n)$ est constante, égale à $\pi/2$.

c) En déduire que :

$$w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

3°) On établit enfin la formule de Stirling.

a) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$$

b) Déterminer la valeur de K à l'aide de ce résultat et de la formule établie à la fin de I :

$$n! \sim K\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}.$$

En déduire enfin un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$ (formule de Stirling).

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2000

ESSEC : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–1

QUESTION–1

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{a+b} f(x,y)$. Donc $\dfrac{f(\lambda x, \lambda y)}{f(x,y)} = \lambda^{a+b}$.

$\underline{a+b=1.}$ Cela veut dire que si l'on augmente le volume d'heures de travail et le volume des équipements de λ, la production est augmentée d'autant.

$\underline{a+b>1.}$

Si $\lambda > 1$. Cela veut dire que si l'on augmente le volume d'heures de travail et le volume des équipements de λ, la production est augmentée de plus que λ (car $\lambda^{a+b} > \lambda$).

Si $\lambda < 1$. Cela veut dire que si l'on diminue le volume d'heures de travail et le volume des équipements de λ, la production est diminuée de plus que λ (car $\lambda^{a+b} < \lambda$).

$\underline{a+b<1.}$

Les résultats sont inverses des précédents.

QUESTION–2

$f(x,y) = \sqrt{xy}$; $g(x,y) = 4x + y$.

2–a)

$f(x,y) = 2 \Longleftrightarrow y = \dfrac{4}{x}$.

2–b)

Une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \dfrac{4}{x}$ au point $(1,4)$ est :

$$\boxed{y - 4 = -4(x-1) \text{ soit } y = -4x + 8.}$$

2–c)

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = 2 & \Longleftrightarrow y = \dfrac{4}{x} \\ g(x,y) = 8 & \Longleftrightarrow 4x + y = 8 \Longleftrightarrow y = -4x + 8 \\ g(x,y) = 10 & \Longleftrightarrow 4x + y = 10 \Longleftrightarrow y = -4x + 10. \end{array}$$

• **Points d'intersection de $f(x,y) = 2$ et de $y = -4x + 8$.** Ce sont les points du plan dont la liste (x,y) des coordonnées est solution du système :

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

$$\begin{cases} y &= \frac{4}{x} \\ y &= -4x+8 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= \frac{4}{x} \\ & \frac{4}{x} = -4x+8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y &= \frac{4}{x} \\ & 4 = -4x^2+8x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y &= \frac{4}{x} \\ & 4(x-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Il y a une seule solution ; le point A, de coordonnées $(1,4)$.

• **Points d'intersection de $y = f(x,y)$ et de $y = -4x+10$.** Le couple (x,y) est solution de

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -4x+10 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ \frac{4}{x} = -4x+10 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ 4 = -4x^2+10x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ 2 = -2x^2+5x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ 2x^2-5x+2 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ (x-2)(2x-1) = 0. \end{cases}$$

Les points d'intersection sont les suivants :

$$\boxed{B(2,2) \text{ et } C(\tfrac{1}{2},8).}$$

Remarque : Si $x = 1$ et $y = 4$ par exemple, la production est de 2 et le coût de 8. Si $x = 2$ et $y = 2$ ou si $x = \frac{1}{2}$ et $y = 8$, la production est toujours de 2, mais le coût est passé à 10.

Voir le dessin ci-dessous.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.