www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

LES ANNALES

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère, pour tout nombre réel a, la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

b. Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

d. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

a. Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.

α) Montrer que X commute avec M_a, puis que X commute avec J.

β) On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h.

γ) Etablir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.

δ) En déduire : $a \geqslant 2$.

b. Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.

c. Conclure.

LES ANNALES

Exercice 2

On considère la fonction $f :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[\end{cases}.$$

1. a. Montrer que f est continue sur $]-1;+\infty[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

d. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$.

2. Montrer : $\forall x \in]-1;+\infty[, \quad \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leqslant 0$.
En déduire les variations de f. On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]-\dfrac{1}{2};\ +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$ existe.

4. On considère la fonction $F :]-\dfrac{1}{2};+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-\dfrac{1}{2};\ +\infty[$, par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt.$$

a. Montrer que F est dérivable sur $]-\dfrac{1}{2};+\infty[$ et que F est croissante.

b. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad F(x) \geqslant x f(2x)$.

c. En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ est convergente.

En déduire que la fonction F admet une limite finie en $-\dfrac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants :

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \ldots, 2n-1\}, \quad P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$.

2. Montrer : $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.
Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

3. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}$.

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2000

EM-LYON : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a)

λ est valeur propre de J si et seulement si la matrice $J-\lambda I$ n'est pas inversible.

$$J-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 2\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} \qquad \text{on effectue } L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$J-\lambda I \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & -1-\lambda & 2\end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3+(\lambda+1)L_2.$$

$$J-\lambda I \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2\end{pmatrix}.$$

La matrice $J-\lambda I$ est triangulaire : elle n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins des pivots est nul, donc si et seulement si

$$\lambda=-2 \text{ ou } \lambda=0 \text{ ou } \lambda=1.$$

Notons E_λ le sous-espace propre de f associé à λ.

$$u=(x,y,z)\in E_\lambda \Longleftrightarrow \begin{cases}-\lambda x+2y+z &=0\\ y-\lambda z &=0\\ (-\lambda^2-\lambda+2)z &=0.\end{cases}$$

- **Pour $\lambda=-2$, cela donne** :

$$\begin{cases}2x+2y+z &=0\\ y+2z &=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}y &=-2z\\ 2x &=3z\\ z &\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

$$\boxed{E_{-2}=\text{vect}\Big((3,-4,2)\Big)\ ;\ \ u_1=(3,-4,2).}$$

- **Pour $\lambda=0$, cela donne** :

$$\begin{cases}2y+z &=0\\ y &=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}y &=0\\ z &=0\\ x &\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

$$\boxed{E_0=\text{vect}\Big((1,0,0)\Big)\ ;\ \ u_2=(1,0,0).}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Remarque : Il était prévisible que $(1,0,0)$ soit dans le noyau de f car, d'après la première colonne de la matrice J de f, $f(1,0,0)=(0,0,0)$.

- **Pour $\lambda=1$, cela donne** :

$$\begin{cases} -x+2y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= z \\ x &= 3z \\ z &\in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\boxed{E_1 = \text{vect}\Big((3,1,1)\Big) \ ; \ \ u_3=(3,1,1).}$$

1–b)

La matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle admet trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

Si l'on pose $P=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors d'après la formule de changement de base pour les matrices, on obtient :

$$\boxed{J=PDP^{-1}}$$

1–c)

$M_a = aI+J \iff P^{-1}M_aP = P^{-1}(aI+J)P$ (**car P et P^{-1} sont inversibles : sinon il n'y aurait que l'implication de gauche à droite)**

$M_a = aI+J \iff P^{-1}M_aP = aI+D.$

Si l'on pose $D_a=\begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}M_aP=D_a$; donc en multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} l'on obtient :

$$\boxed{M_a = PD_aP^{-1}.}$$

1–d)

On sait qu'**une matrice carrée n'est pas inversible si et seulement si elle admet 0 pour valeur propre. Donc une matrice carrée est inversible si et seulement si elle n' admet pas 0 pour valeur propre.** Or les valeurs propres de M_a sont $a-2,\ 1+a,\ a$. Il en résulte que M_a est inversible si et seulement si $a-2\neq 0,\ 1+a\neq 1,\ a\neq 0$.

$$\boxed{M_a \text{ est inversible si et seulement si } a \notin \{-1,2,0\}.}$$

QUESTION–2

2–a)

$\alpha)$ $M_a = X^2 \Longrightarrow XM_a = X^3 = X^2X = M_aX$. Donc M_a et X commutent. Or $J=M_a-aI$, X commute avec M_a et avec I (I commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), on conclut que X et J commutent.

$$\boxed{XJ=JX.}$$

$\beta)$ Nous avons noté λ les valeurs propres de f, donc de J. Considérons une valeur propre λ de f et soit u un vecteur propre de f associé à λ.

On a $f(u)=\lambda u$ et $u\neq(0,0,0)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.