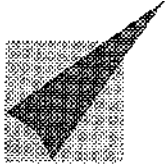




[www.KlubPrepa.net](http://www.KlubPrepa.net)  
l'internet dédié aux prépas HEC



**ECRICOME**

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

## CONCOURS D'ADMISSION 2001

Option économique

# MATHÉMATIQUES

Mardi 24 avril 2001 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**  
**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le [www.KlubPrepa.net](http://www.KlubPrepa.net)

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

LES  
ANNALES  
DES

## 1. EXERCICE.

Dans cet exercice on étudie l'évolution au cours du temps d'un titre dans une bourse de valeurs.

1.1. Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où  $a$  représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels  $a, b$ , on a :  $M(a).M(b) = M(a + b - 3ab)$
2. En déduire les valeurs de  $a$  pour lesquelles la matrice  $M(a)$  est inversible et exprimer son inverse.
3. Justifier le fait que  $M(a)$  est diagonalisable.
4. Déterminer le réel  $a_0$  non nul, tel que :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0) \quad \alpha_0 = \frac{2}{3}$$

5. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \text{ et } Q = I - P$$

où  $I$  désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.

a. Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$ , que l'on exprimera en fonction de  $a$ , tel que :

$$M(a) = P + \alpha Q$$

- b. Calculer  $P^2, QP, PQ, Q^2$ .
- c. Pour tout entier naturel  $n$ , non nul, montrer que  $[M(a)]^n$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $P$  et  $Q$ .
- d. Expliciter alors la matrice  $[M(a)]^n$ .

## 1.2. Evolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que  $a \in ]0, \frac{2}{3}[$

1. On définit des suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , par leur premier terme  $p_1, q_1, r_1$ , et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$



- a. Exprimer  $p_n, q_n, r_n$  en fonction de  $n, p_1, q_1, r_1$
- b. Etudier la convergence de ces suites.

2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :
- le premier jour le titre est stable.
  - si un jour  $n$ , le titre monte, le jour  $n + 1$ , il montera avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ , restera stable avec la probabilité  $\frac{1}{6}$ , et baissera avec la probabilité  $\frac{1}{6}$ .
  - si un jour  $n$ , le titre est stable, le jour  $n + 1$ , il montera avec la probabilité  $\frac{1}{6}$ , restera stable avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ , et baissera avec la probabilité  $\frac{1}{6}$ .
  - si un jour  $n$ , le titre baisse, le jour  $n + 1$ , il montera avec la probabilité  $\frac{1}{6}$ , restera stable avec la probabilité  $\frac{1}{6}$ , et baissera avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ .
- On note  $M_n$  (respectivement  $S_n$ , respectivement  $B_n$ ) l'événement "le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour  $n$ ".

- a. Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour  $n + 1$  en fonction de ces mêmes probabilités au jour  $n$ .
- b. En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour  $n$ .
- c. Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

## 2. EXERCICE.

Un système est constitué de  $n$  composants. On suppose que les variables aléatoires  $T_1, T_2, \dots, T_n$  mesurant le temps de bon fonctionnement de chacun des  $n$  composants sont indépendantes, de même loi, la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

### 2.1. Calcul du nombre moyen de composants défectueux entre les instants 0 et $t$

On note  $N_t$  la variable aléatoire égale au nombre de composants défectueux entre les instants 0 et  $t$  avec  $t \geq 0$ .

1. Pour tous les entiers  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , calculer la probabilité de l'événement  $\{T_i < t\}$ .
2. Montrer que  $N_t$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres et son espérance  $E(N_t)$ .
3. A partir de quel instant  $t_0$  le nombre moyen de composants défectueux dépasse-t-il la moitié du nombre de composants ?

### 2.2. Montage en série.

On suppose que le système fonctionne correctement si tous les composants eux-mêmes fonctionnent correctement et note  $S_n$  la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1. Pour  $t \in \mathbb{R}$ , exprimer l'événement  $\{S_n > t\}$  en fonction des événements :

$$\{T_1 > t\}, \{T_2 > t\}, \dots, \{T_n > t\}$$

- Déterminer alors la fonction de répartition  $F_n$  de  $S_n$  puis définir sa densité  $f_n$ .
- Reconnaître la loi de  $S_n$  et donner sans calcul l'espérance  $E(S_n)$  et la variance  $V(S_n)$  de  $S_n$ .

### 2.3. Montage en parallèle.

On suppose maintenant que le système fonctionne correctement si l'un au moins des composants fonctionne correctement et note  $U_n$  la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

- Exprimer  $\{U_n < t\}$  en fonction des événements  $\{T_1 < t\}, \{T_2 < t\}, \dots, \{T_n < t\}$ .
- Déterminer alors la fonction de répartition  $G_n$  de  $U_n$  puis montrer que sa densité  $g_n$  est définie par :

$$\begin{cases} g_n(t) = n\lambda(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ g_n(t) = 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Montrer l'existence de l'espérance  $E(U_n)$  de  $U_n$  et prouver que :

$$E(U_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$

puis, que pour tous entiers naturels  $n$ ,

$$E(U_{n+1}) - E(U_n) = \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

- Par sommation de la relation précédente, et en utilisant l'équivalent simple :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$$

donner un équivalent simple de  $E(U_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### 3. EXERCICE.

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et  $a$  un réel strictement positif.  
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) : \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction  $f_n$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} - a$$



### 3.1. Etude d'un cas particulier

Pour cette question seulement, on prend  $a = \frac{11}{6}$  et  $n = 1$ .

1. Représenter la fonction  $f_1$  relativement à un repère orthonormal du plan. (unité graphique 2 cm)
2. Calculer  $f_1(1)$ , puis déterminer les racines de  $(E_1)$ .  
(On donne  $\sqrt{37} = 6,08$  à  $10^{-2}$  près par défaut)

### 3.2. Dénombrement des racines de $(E_n)$

1. Dresser le tableau de variations de  $f_n$ .
2. Justifier l'existence de racines de l'équation  $(E_n)$  et en déterminer le nombre.

### 3.3. Equivalent de la plus grande des racines quand $n$ tend vers $+\infty$

On note  $x_n$  la plus grande des racines de  $(E_n)$ .

1. Justifier que  $x_n > 0$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x > 1$  :

$$\frac{1}{x} < \ln \frac{x}{x-1} < \frac{1}{x-1}$$

En déduire que pour  $x$  réel strictement positif :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a$$

puis, que :

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}$$

3. Montrer que pour tout  $n$  entier naturel, non nul :

$$x_n > \frac{2n}{\exp a - 1}$$

4. Quelle est la limite de  $x_n$ , puis la limite de  $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right)$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?
5. Prouver enfin l'existence d'un réel  $\delta$ , que l'on exprimera en fonction de  $a$ , tel que l'on ait, au voisinage de l'infini, l'équivalent suivant :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \delta.n$$

Fin de l'épreuve



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ECRICOME

CORRIGE

EXERCICE-I

Partie-1

QUESTION-1

Il suffit de faire le calcul et on trouvera sans problème

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, M(a) \times M(b) = M(a + b - 3ab).$$

QUESTION-2

Soit  $F = \{M(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, M(a) = M(b) \iff a = b$ , car les deux matrices

$\begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix}$  sont égales si et seulement si  $a = b$ .

On remarque que  $M(0) = I_3$ . Donc

$$M(x) = I_3 \iff x = 0.$$

En conséquence une matrice  $M(a)$  appartenant à  $F$  admet un inverse appartenant à  $F$  si et seulement s'il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $M(a) \times M(b) = I_3$ , ce qui équivaut successivement à

$$M(a + b - 3ab) = M(0), \text{ puis à } a + b - 3ab = 0.$$

$$\begin{aligned} a + b - 3ab = 0 &\iff b(3a - 1) = a \\ &\iff a \neq \frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{a}{3a - 1}. \end{aligned}$$

Donc  $M(a)$  admet un inverse  $M(b)$  dans  $F$  si et seulement si  $a \neq \frac{1}{3}$ .

$M(\frac{1}{3})$  n'a pas d'inverse dans  $F$ , mais elle pourrait avoir un inverse qui ne soit pas dans  $F$ .

$$\text{On regarde } M\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a ses trois lignes égales, elle n'est donc pas inversible. Nous pouvons donc conclure

$$M(a) \text{ est inversible si et seulement si } a \neq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Dans ces conditions } M^{-1}(a) = M\left(\frac{a}{3a-1}\right).$$

### QUESTION-3

$M(a)$  est diagonalisable car elle est **symétrique réelle**.

### QUESTION-4

$\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $M^2(a) = M(a) \times M(a) = M(2a - 3a^2)$  d'après la question 1. Donc

$$\begin{aligned} M^2(a) = M(a) &\iff M(2a - 3a^2) = M(a) \\ &\iff 2a - 3a^2 = a \\ &\iff a - 3a^2 = 0 \\ &\iff a(1 - 3a) = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ ou } a = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } a_0 \neq 0, \text{ donc } a_0 = \frac{1}{3}.$$

### QUESTION-5

5-a)

$$\begin{aligned} M(a) &= P + \alpha Q = P + \alpha(I - P) \\ &= (1 - \alpha)P + \alpha I \\ &= \frac{1 - \alpha}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+2\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} \\ \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1+2\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} \\ \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1+2\alpha}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} \\ \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1+2\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} \\ \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1+2\alpha}{3} \end{pmatrix} \text{ qui équivaut à}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1-\alpha}{3} \\ 1-2a = \frac{1+2\alpha}{3} \end{cases}$$

On effectue  $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$  ;

$$\begin{cases} a = \frac{1-\alpha}{3} \\ 1-2a = \frac{1+2\alpha}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1-\alpha}{3} \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Le système équivaut à :  $a = \frac{1-\alpha}{3}$ , qui équivaut à  $\alpha = 1 - 3a$ .

$$M(a) = P + \alpha Q \iff \alpha = 1 - 3a.$$

**5-b)**

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \left(M\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 = M\left(\frac{1}{3}\right) \quad (\text{d'après la question 4}) \\
 P^2 &= P. \\
 Q^2 &= (I - P)^2 = I - 2P + P^2 \quad (\text{car } I \text{ et } P \text{ commutent}) \\
 &= I - 2P + P = I - P \\
 Q^2 &= Q. \\
 QP &= (I - P)P = P - P^2 = P - P = (0). \\
 PQ &= P(I - P) = P - P^2 = (0).
 \end{aligned}$$

On peut remarquer (quitte à le montrer sans problème par récurrence) que  $\forall k \geq 1, P^k = P$ , et  $Q^k = Q$ .

En résumé :  $\forall k \geq 1, P^k = P, Q^k = Q ; PQ = QP = (0)$ .

**5-c)**

$P$  et  $Q$  commutent et leur produit vaut la matrice nulle.

Donc  $P(\alpha Q) = \alpha PQ = \alpha(0) = 0$  ; de même  $(\alpha Q)P = (0)$ .

**Les matrices  $P$  et  $\alpha Q$  commutent, on peut donc développer  $(P + \alpha Q)^n$  par Newton.**

Pour  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
 (P + \alpha Q)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k (\alpha Q)^{n-k} \quad \text{avec } P^0 = Q^0 = I. \\
 &= P^0 \alpha^n Q^n + P^n \alpha^0 Q^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P^k (\alpha Q)^{n-k}
 \end{aligned}$$

On a isolé les termes extrêmes correspondant à  $k = 0$  et à  $k = n$ .

Dans la somme restante,  $1 \leq k \leq n - 1$ , donc  $1 - n \leq -k \leq -1$  (on a multiplié l'encadrement par  $-1 < 0$ ), puis  $1 \leq n - k \leq n - 1$  (on a ajouté aux trois termes du dernier encadrement l'entier  $n$ ).

Cela permet de mettre en facteur  $PQ$  dans chaque terme de la somme ; en effet,

$P^k (\alpha Q)^{n-k} = PQ(P^{k-1} Q^{n-1-k})$ , avec  $k - 1 \geq 0$  et  $n - 1 - k \geq 0$ . Donc

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P^k (\alpha Q)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} PQ(P^{k-1} Q^{n-1-k}) \\
 &= PQ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P^{k-1} Q^{n-1-k} \\
 &= (0) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P^{k-1} Q^{n-1-k} = (0).
 \end{aligned}$$

Conclusion

$$\begin{aligned}
 (P + \alpha Q)^n &= P^0 \alpha^n Q^n + P^n \alpha^0 Q^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P^k (\alpha Q)^{n-k} \\
 &= I \alpha^n Q + P I \quad (\text{car } P^n = P, Q^n = Q, P^0 = Q^0 = I). \\
 &= \alpha^n Q + P = P + \alpha^n Q.
 \end{aligned}$$

On peut remarquer que ce résultat, montré pour  $n \geq 2$ , est valable aussi pour  $n = 1$  (il donne  $(P + \alpha Q) = P + \alpha Q$ ).

N'oublions pas que  $P + \alpha Q = M(a)$  pour  $\alpha = 1 - 3a$ , donc

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, M(a)^n = (P + \alpha Q)^n = P + \alpha^n Q = P + (1 - 3a)^n Q$ .