www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Jeudi 10 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

LES ANNALES

EXERCICE I

A. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. a) Montrer que A admet les valeurs propres 1 et 2 et n'en admet pas d'autre.

   Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2 associés à ces valeurs propres.

   b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Trouver un vecteur W de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(W) = V + W$.

3. Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice B représentant l'endomorphisme φ dans la base (U, V, W) ainsi qu'une matrice inversible P telle qu'on ait l'égalité $B = P^{-1}AP$.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

B. Étant données les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on associe à tout élément (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ la matrice $C_{(a,b,c)}$ définie par :

$$C_{(a,b,c)} = aI + bH + cN$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $C_{(a,b,c)}$, où (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 et déterminer sa dimension.
2. Vérifier que la matrice B définie dans la question **A.4** appartient à $\mathcal{M}$.
3. Préciser les conditions que doivent vérifier les nombres a, b et c pour que la matrice $C_{(a,b,c)}$ soit inversible. Déterminer, quand elle existe, sa matrice inverse.
4. Déterminer les valeurs propres de $C_{(a,b,c)}$.

   Montrer que cette matrice est diagonalisable si et seulement si c est nul.

****

EXERCICE II

A. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et tout y strictement positifs, par :

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G.
2. Rechercher les extremums éventuels de la fonction G dans le domaine $]0, \infty[\times]0, \infty[$.

B. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par :

$$f(x) = G(x, 1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

1. Étudier les variations de f. Montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.
2. a) Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   b) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe et calculer sa valeur.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$.

a) Établir, pour tout entier j vérifiant $1 \leq j < n$, les inégalités :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

b) En déduire l'encadrement

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Montrer les inégalités :

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{0}^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$$

4. On considère la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ où, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, S_n est défini comme dans la question précédente. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

5. *On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a l'égalité :* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n.

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

****

EXERCICE III

A. Préliminaire

Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

B. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et **sans remise**, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

2. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[1, N]$. Montrer que l'on a

$$\mathrm{P}(X_1 = i,\, X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leq j \leq i \leq N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

3. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

4. a) Montrer que la variable aléatoire $N+1-X_2$ a la même loi que X_1.

   b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_2 - X_1$ et la comparer à la loi de X_1.

5. À l'aide des résultats de la question 4 :

   a) Calculer les espérances $\mathrm{E}(X_1)$ et $\mathrm{E}(X_2)$.

   b) Montrer l'égalité des variances $\mathrm{V}(X_1)$ et $\mathrm{V}(X_2)$.

   c) Établir la relation : $2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{V}(X_1)$, où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables aléatoires X_1 et X_2.

6. Calculer $\mathrm{V}(X_1)$; en déduire $\mathrm{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

LES ANNALES

C. Dans cette partie, N désigne encore un entier supérieur ou égal à 2.

1. On considère le programme Turbo-Pascal suivant, où `RANDOM(10)` désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur dans l'intervalle [0,9] (la procédure `RANDOMIZE` sert à initialiser la fonction `RANDOM`) :

```
PROGRAM Tirage;
VAR
  a,b,c :  INTEGER;
BEGIN
  RANDOMIZE;
  a:= RANDOM(10)+1;
  b:= RANDOM(10)+1;
    IF a > b THEN
      BEGIN
        c:=a; a:=b; b:=c;
      END;
    IF a < b WRITELN('(',a,',',b,')');
END.
```

   a) Que fait l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent toutes les deux le même nombre ?

   b) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent respectivement les nombres 3 et 5 ?

   c) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent respectivement les nombres 10 et 1 ?

2. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et on désigne par D l'événement : "A ne prend pas la même valeur que B".

   a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

   b) Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$

   Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}([Y_1 = i, Y_2 = j] \,/\, D)$.

3. Expliquer pourquoi le programme de la question 1 permet de simuler les variables aléatoires X_1 et X_2 de la partie B, dans le cas où N est égal à 10.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ESCP-EAP MATH III

CORRIGE

EXERCICE I

PARTIE A

QUESTION–1

1–a)

λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si le système (S), d'inconnues (x,y,z) n'est pas de Cramer.

$$\textbf{(S)} \quad \begin{cases} -(1+\lambda)x - y + 2z &= 0 \\ x + (2-\lambda)y - z &= 0 \\ -2x - y + (3-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

(S) équivaut à (on permute L_1 et L_2)

$$\begin{cases} x + (2-\lambda)y - z &= 0 \\ -(1+\lambda)x - y + 2z &= 0 \\ -2x - y + (3-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

puis à (on effectue $L_2 \longleftarrow L_2 + (1+\lambda)L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$)

$$\begin{cases} x + (2-\lambda)y - z &= 0 \\ (-\lambda^2+\lambda+1)y + (1-\lambda)z &= 0 \\ (3-2\lambda)y + (1-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

puis à (on échange l'ordre de y et z)

$$\begin{cases} x - z + (2-\lambda)y &= 0 \\ (1-\lambda)z + (-\lambda^2+\lambda+1)y &= 0 \\ (1-\lambda)z + (3-2\lambda)y &= 0 \end{cases}$$

et pour finir à (on effectue $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$)

$$\begin{cases} x - z + (2-\lambda)y &= 0 \\ (1-\lambda)z + (-\lambda^2+\lambda+1)y &= 0 \\ (\lambda^2-3\lambda+2)y &= 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est triangulaire ; il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un au moins des termes diagonaux est nul.

λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

$$\boxed{\text{spect}A = \{1,2\}}$$

Recherche des sous-espaces propres.

Si $\lambda = 1$, le système **(S)** équivaut à

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

$\begin{cases} x-z+y &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$ Soit $x=z, y=0$.

$E_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x=z, y=0\}$
$= \{(x,0,x) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$
$= \{x(1,0,1) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$

$$\boxed{E_1 = \text{vect}\Big((1,0,1)\Big). \quad \dim E_1 = 1.}$$

Si $\lambda = 2$, le système **(S)** équivaut à

$\begin{cases} x-z &= 0 \\ -z-y &= 0 \end{cases}$

Soit $z=x, y=-z=-x$.

$E_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=x, \ y=-x\}$
$= \{(x,-x,x) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$
$= \{x(1,-1,1) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$

$$\boxed{E_2 = \text{vect}\Big((1,-1,1)\Big). \quad \dim E_2 = 1.}$$

1–b)

$$\boxed{\dim E_1 + \dim E_2 = 2 \neq \dim\mathbb{R}^3. \ A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

QUESTION–2

Cherchons $W=(x,y,z)$ tel que $\varphi(W) = (1,0,1)+W = (1,0,1)+(x,y,z)$. Cette égalité vectorielle équivaut à l'égalité matricielle

$$A\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Cette égalité matricielle équivaut au système suivant :

$\begin{cases} -x-y+2z &= 1+x \\ x+2y-z &= y \\ -2x-y+3z &= 1+z \end{cases}$

soit à

$\begin{cases} -2x-y+2z &= 1 \\ x+y-z &= 0 \\ -2x-y+2z &= 1 \end{cases}$

puis à

$\begin{cases} -2x-y+2z &= 1 \\ x+y-z &= 0 \end{cases}$

(puisque les deux dernières lignes sont égales),

puis à (on effectue $L_1 \longleftarrow L_1+2L_2$)

$\begin{cases} y &= 1 \\ x+y-z &= 0 \end{cases}$

et finalement à

$\begin{cases} y &= 1 \\ x &= z-1. \end{cases}$

$$\boxed{\text{Nous prendrons, par exemple, } W=(-1,1,0) \text{ correspondant à } z=0.}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

QUESTION–3

Prenons $U = (1, -1, 1)$.

La famille (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice de ces trois vecteurs dans la base caononique de $\mathbb{R}^3$ est inversible.

Cette matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Effectuons les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$. On trouve la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est une matrice triangulaire, aucun des termes diagonaux n'est nul ; **cette matrice est inversible, donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ également**.

Dans ces conditions la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\boxed{\text{la nouvelle base } (U, V, W) \text{ de } \mathbb{R}^3.}$

QUESTION–4

On sait que $\varphi(U) = 2U$, $\varphi(V) = V$ et $\varphi(W) = V + W$. **Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée**, la matrice de φ dans la base (U, V, W) est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, on sait que A et B sont liées par la relation

$$\boxed{B = P^{-1}AP.}$$

PARTIE B

QUESTION–1

Par définition, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de I, H, N.

$$\boxed{\mathcal{M} = \text{vect}(I, H, N), \text{ donc } \mathcal{M} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

La famille (I, H, N) est une famille génératrice de $\mathcal{M}$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ aI + bH + cN = (0)$. Cette égalité est $\begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = (0)$.

Il vient immédiatement $a = b = c = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La famille } (I, H, N) \text{ est libre, génératrice de} \\ \mathcal{M} \text{ ; c'est une base de } \mathcal{M} : \dim \mathcal{M} = 3.\end{array}}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.