



**ESSEC**

MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option économique

**MATHEMATIQUES III**

Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**EXERCICE 1** (Etude d'une suite de nombres réels)

On étudie dans cet exercice la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

A cet effet, on introduit pour tout nombre entier  $k \geq 0$  les deux intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt.$$

1°) Convergence de la suite  $(J_k/I_k)$

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq \pi/2$  :

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $k \geq 0$  :

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1}).$$

c) Exprimer  $I_{k+1}$  en fonction de  $I_k$  en intégrant par parties l'intégrale  $I_{k+1}$  (on pourra poser  $u'(t) = \cos(t)$  et  $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$  dans l'intégration par parties).

d) Dédire des résultats précédents que  $J_k/I_k$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

LES  
ANNALES  
ESSEC

2°) Convergence et limite de la suite  $(S_n)$

- a) Exprimer  $I_k$  en fonction de  $J_k$  et  $J_{k-1}$  en intégrant deux fois par parties l'intégrale  $I_k$  ( $k \geq 1$ ).  
b) En déduire la relation suivante pour  $k \geq 1$  :

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}.$$

- c) Calculer  $J_0$  et  $I_0$ , puis déterminer la limite  $S$  de la suite  $(S_n)$ .  
d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $k \geq 2$  :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de  $S_{n+p} - S_n$  pour  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$ , puis de  $S - S_n$ , et montrer que :

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Autrement dit,  $S_n + \frac{1}{n}$  constitue une valeur approchée de  $S$  à  $\frac{1}{n^2}$  près.

- e) Ecrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre  $S$  à  $10^{-6}$  près.

**EXERCICE 2** (Algèbre linéaire et étude d'une marche aléatoire)

Cet exercice a pour but l'étude d'une marche aléatoire sur les sommets d'un triangle, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on aborde des questions préliminaires d'algèbre linéaire.

**Partie I**

On associe à tout triplet  $(x, y, z)$  de nombres réels la matrice  $M(x, y, z)$  définie par :

$$M(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}.$$

La matrice  $M(1, 0, 0)$  n'est autre que la matrice identité  $I_3$  et la matrice  $M(0, 1, 0)$  est notée  $J$ .

1°) L'espace vectoriel  $E$  des matrices  $M(x, y, z)$

- a) Calculer les matrices  $J^2$  et  $J^3$ .  
b) Etablir que l'ensemble  $E$  des matrices de la forme  $M(x, y, z)$  où  $(x, y, z)$  décrit  $\mathbb{R}^3$  constitue un sous-espace vectoriel de l'espace  $M_3(\mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre 3.  
c) Etablir que  $(I_3, J, J^2)$  forme une base de  $E$ .

2°) Matrices inversibles de l'espace vectoriel  $E$

- a) Calculer le produit  $M(x, y, z) \times M(x', y', z')$  et montrer que celui-ci est élément de  $E$ .  
Les matrices  $M(x, y, z)$  et  $M(x', y', z')$  commutent-elles?  
b) En déduire l'égalité suivante :  
$$M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]I_3.$$
  
c) Etablir qu'une condition suffisante pour que  $M(x, y, z)$  soit inversible est que  $x, y, z$  soient tels que  $x+y+z \neq 0$  et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de  $M(x, y, z)$ ?  
d) Etablir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

3°) Éléments propres des matrices  $M(x, y, z)$

- Etablir qu'un nombre réel  $\lambda$  est valeur propre de  $M(x, y, z)$  si et seulement si  $M(x-\lambda, y, z)$  n'est pas inversible.
- Montrer que  $x+y+z$  est valeur propre de  $M(x, y, z)$  et préciser le sous-espace propre associé.
- On suppose ici que  $y \neq z$ . Montrer que  $M(x, y, z)$  n'a pas d'autre valeur propre. La matrice  $M(x, y, z)$  est-elle diagonalisable?
- On suppose ici que  $y = z$ . Montrer sans calcul que  $M(x, y, y)$  est diagonalisable, et préciser quelles sont ses valeurs propres.

4°) Diagonalisation des matrices  $M(x, y, y)$

- Calculer les produits matriciels suivants :

$$M(x, y, y) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad M(x, y, y) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad M(x, y, y) \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Déterminer deux matrices  $P$  et  $P^{-1}$  inverses l'une de l'autre telles que :

$$P^{-1} M(x, y, y) P = \begin{bmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{bmatrix}.$$

- En déduire la relation suivante pour tout nombre entier naturel  $n$  :

$$[M(x, y, y)]^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2, -1, -1).$$

**Partie II**

On désigne dans toute cette partie par  $p$  un nombre réel tel que  $0 < p < 1/2$  et on considère la marche aléatoire d'un point  $S$  sur les sommets d'un triangle  $ABC$ .

A l'instant initial  $t = 0$ , le point  $S$  est en  $A$ , et il se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si  $S$  est à l'instant  $n$  au sommet  $A$  du triangle :  
il est à l'instant  $n+1$  au sommet  $B$  avec la probabilité  $p$ , au sommet  $C$  avec la probabilité  $p$ , ou encore au sommet  $A$  avec la probabilité  $1-2p$ .
- Si  $S$  est à l'instant  $n$  au sommet  $B$  du triangle :  
il est à l'instant  $n+1$  au sommet  $C$  avec la probabilité  $p$ , au sommet  $A$  avec la probabilité  $p$ , ou encore au sommet  $B$  avec la probabilité  $1-2p$ .
- Si  $S$  est à l'instant  $n$  au sommet  $C$  du triangle :  
il est à l'instant  $n+1$  au sommet  $A$  avec la probabilité  $p$ , au sommet  $B$  avec la probabilité  $p$ , ou encore au sommet  $C$  avec la probabilité  $1-2p$ .

Pour tout nombre entier naturel  $n$ , on désigne enfin par :

- $A_n$  l'événement "le point  $S$  est au sommet  $A$  à l'instant  $n$ " et par  $a_n$  sa probabilité.
- $B_n$  l'événement "le point  $S$  est au sommet  $B$  à l'instant  $n$ " et par  $b_n$  sa probabilité.
- $C_n$  l'événement "le point  $S$  est au sommet  $C$  à l'instant  $n$ " et par  $c_n$  sa probabilité.

1°) Calcul des probabilités  $a_n, b_n, c_n$

- Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales les probabilités  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  en fonction des probabilités  $a_n, b_n, c_n$ .



b) En déduire une matrice  $M$  telle qu'on ait pour tout nombre entier naturel  $n$  :

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

c) En déduire en fonction de  $p$  les probabilités  $a_n, b_n, c_n$  et leurs limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2°) Nombres moyens des passages en  $A, B, C$  entre les instants 1 et  $n$

a) On désigne dans cette question par  $X_n$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque  $S$  est au sommet  $A$  à l'instant  $n$ , et prenant la valeur 0 sinon.

Interpréter la variable aléatoire  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  et son espérance  $m_n = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ , puis établir que :

$$m_n = \frac{1}{3} \left[ n + 2(1-3p) \frac{1-(1-3p)^n}{3p} \right].$$

Donner un équivalent de  $m_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) Déterminer les espérances des nombres de passage du point  $S$  au sommet  $B$  et au sommet  $C$  entre les instants 1 et  $n$  (compris).

3°) Instant moyen du premier passage du point  $S$  aux sommets  $B$  ou  $C$

a) Déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement  $B_{n+1}$  sachant que l'événement  $\bar{B}_n$  (événement contraire de  $B_n$ ) est réalisé.

b) On note  $T_B$  la variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point  $S$  est au sommet  $B$ . Déterminer la loi de  $T_B$ , puis l'espérance  $E(T_B)$  de  $T_B$ .

c) Que dire de  $T_C$ , variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point  $S$  est au sommet  $C$  ?



## ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

D'après ESSEC MATH III

CORRIGE

## ESSEC III : formule de Stirling

## EXERCICE

## QUESTION-1

a) Cette inégalité est due à la concavité de la fonction  $\sin$  sur l'intervalle  $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ . Rappelons qu'une fonction  $f$  deux fois dérivable sur un intervalle et dont la dérivée seconde est négative est concave : géométriquement cela veut dire que pour tous points  $A$  et  $B$  de la courbe représentative de  $f$ , la portion de courbe comprise entre  $A$  et  $B$  est au dessus du segment  $[A; B]$ .

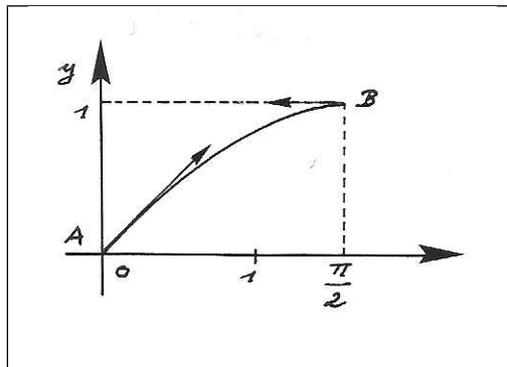
Appliquons ce résultat à la fonction  $\sin$  sur l'intervalle  $I$ .

$\sin'' = -\sin \leq 0$  sur  $I$  ; donc  $\sin$  est effectivement concave sur  $I$ .

Considérons les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(0,0)$  et  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ . On vérifie facilement qu'ils sont sur la courbe représentative de  $\sin$  et que la droite  $(A, B)$  a pour équation  $y = \frac{2}{\pi}x$ . Pour cela, on peut vérifier que  $(0,0)$  et  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  satisfont à l'équation de la droite.

La concavité donne alors :

$\forall t \in I, \sin t \geq \frac{2}{\pi}t$  ; inégalité équivalente à :  $\forall t \in I, t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$  car  $\frac{\pi}{2} > 0$ .



• Il existe une autre méthode plus traditionnelle qui consiste à étudier la fonction différence,  $d$ , définie sur  $I$  par  $d(t) = -t + \frac{\pi}{2} \sin t$ .

$$d'(t) = -1 + \frac{\pi}{2} \cos t$$

$$d''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin t \leq 0 \text{ sur } I.$$

On obtient les tableaux de variations suivants :

$t$	0		$\alpha$		$\frac{\pi}{2}$
$d''(t)$		—		—	
$d'(t)$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$d'(t)$		+		-	
$d$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On constate que  $d(t) \geq 0$  sur  $I$ , ce qui est l'inégalité demandée.

b)

$$\begin{aligned}
 I_k - I_{k+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2k}(t) - \cos^{2(k+2)}(t)) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)(1 - \cos^2(t)) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) \sin^2(t) dt,
 \end{aligned}$$

d'après la relation **fondamentale** de la trigonométrie.

Or sur  $I$ ,  $\frac{\pi}{2} \sin(t) \geq t$ . Cela équivaut à  $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t \geq 0$ .

**S'agissant d'inégalités entre nombres positifs, on peut élever au carré.**

On obtient  $\sin^2(t) \geq \frac{4}{\pi^2}t^2$ . Multiplions cette inégalité par  $\cos^{2k}(t) \geq 0$ , on obtient  $\sin^2(t) \cos^{2k}(t) \geq \frac{4}{\pi^2}t^2 \cos^{2k}(t)$ .

Intégrons cette inégalité entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  ; comme les **bornes sont dans l'ordre croissant** on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2k}(t) dt &\geq \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt, \quad \text{c'est-à-dire} \\
 I_k - I_{k+1} &\geq \frac{4}{\pi^2} J_k.
 \end{aligned}$$

Comme  $\frac{4}{\pi^2} > 0$ , on peut diviser cette inégalité par  $\frac{4}{\pi^2}$ , on obtient

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1}).$$

c)

$$I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t) dt.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Posons donc } u(t) &= \cos^{2k+1}(t) & ; & & u'(t) &= -(2k+1) \sin(t) \cos^{2k}(t) \\
 v'(t) &= \cos(t) & ; & & v(t) &= \sin(t)
 \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , donc

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \underbrace{\left[ \sin(t) \cos^{2k+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) \sin^2(t) dt \\
&= (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) (1 - \cos^2(t)) dt \\
&= (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2k}(t) - \cos^{2k+2}(t)) dt \\
&= (2k+1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t) dt \right) \\
&= (2k+1)(I_k - I_{k+1}).
\end{aligned}$$

Donc  $I_{k+1}(1+2k+1) = (2k+1)I_k$ , ce qui donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k. \quad (1)$$

d) \_\_\_\_\_

Partons de l'encadrement  $0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1})$ .

D'après la question précédente,  $I_k - I_{k+1} = \frac{2k+2}{2k+1} I_{k+1} - I_{k+1} = \frac{I_{k+1}}{2k+1}$ , donc

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{I_{k+1}}{2k+1}. \quad (2)$$

**Divisons par**  $I_k > 0$ . En effet, c'est un théorème peu utilisé, mais pas inutile pour autant, qui donne la justification :

La fonction  $\cos^{2k}$  est **continue sur  $I$ , positive et non identiquement nulle** (car en fait elle ne s'annule qu'au point  $\frac{\pi}{2}$  si  $k > 0$  sinon ne s'annule pas).

**On sait que dans ces conditions l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t dt$  est strictement positive.**

L'encadrement (2) équivaut à :

$$0 \leq \frac{J_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4(2k+1)} \frac{I_{k+1}}{I_k}. \quad (3)$$

Or, d'après l'égalité (1),  $\frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{2k+1}{2k+2}$ , donc

$$\frac{\pi^2}{4(2k+1)} \frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{\pi^2}{4(2k+1)} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\pi^2}{4(2k+2)}.$$

L'encadrement (3) équivaut alors à :

$$0 \leq \frac{J_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4(2k+2)}.$$

$$\text{Par encadrement, } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0.$$

## QUESTION-2

---

a)

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt.$$

**Faisons une intégration par parties :** pour  $k \geq 1$ .

$$\begin{aligned}
u_1(t) = \cos^{2k}(t) & ; & u_1'(t) = -2k \sin(t) \cos^{2k-1}(t) \\
v_1'(t) = 1 & ; & v_1(t) = t
\end{aligned}$$

Les fonctions  $u_1$  et  $v_1$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

$$I_k = \underbrace{\left[ t \cos^{2k} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2k \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2k-1}(t) dt}_{K_k}. \quad (4)$$

**Intégrons  $K_k$  par parties** pour faire apparaître  $t^2 \cos^{2k-2}(t)$ .

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \sin(t) \cos^{2k-1}(t) & ; & \quad u_2'(t) = \cos^{2k}(t) - (2k-1) \sin^2(t) \cos^{2k-2}(t) \\ v_2(t) &= t & ; & \quad v_2'(t) = \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

**Les fonctions  $u_2$  et  $v_2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .**

Remarquons que

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= \cos^{2k}(t) - (2k-1) \sin^2(t) \cos^{2k-2}(t) \\ &= \cos^{2k}(t) - (2k-1)(1 - \cos^2(t)) \cos^{2k-2}(t) \\ &= \cos^{2k}(t) - (2k-1)(\cos^{2k-2}(t) - \cos^{2k}(t)) \\ &= (1 + 2k - 1) \cos^{2k}(t) - (2k-1) \cos^{2k-2}(t) \\ &= 2k \cos^{2k}(t) - (2k-1) \cos^{2k-2}(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_k &= \underbrace{\left[ \frac{t^2}{2} \sin(t) \cos^{2k-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \left( 2k \cos^{2k}(t) - (2k-1) \cos^{2k-2}(t) \right) dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 k \cos^{2k}(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (2k-1) \cos^{2k-2}(t) dt \end{aligned}$$

$$K_k = -k J_k + \frac{2k-1}{2} J_{k-1}.$$

En reportant dans l'égalité (4), on obtient  $I_k = 2k(-k J_k + \frac{2k-1}{2} J_{k-1})$ , soit

$$I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1) J_{k-1}. \quad (5)$$

b)

Utilisons la relation (1) entre  $I_{k+1}$  et  $I_k$  trouvée à la question précédente et remplaçons  $k$  par  $k-1$  :  $I_k = \frac{2k-1}{2k} I_{k-1}$ , pour  $k \geq 1$ . Cette relation équivaut à  $2k^2 I_k = k(2k-1) I_{k-1}$ , ou encore  $k(2k-1) = 2k^2 \frac{I_k}{I_{k-1}}$ .

Reportons dans l'égalité (5) trouvée juste avant :

$$\begin{aligned} I_k &= -2k^2 J_k + 2k^2 \frac{I_k}{I_{k-1}} J_{k-1} \\ &= \frac{2k^2}{I_{k-1}} \left( -J_k I_{k-1} + I_k J_{k-1} \right) \\ I_k I_{k-1} &= 2k^2 (-J_k I_{k-1} + I_k J_{k-1}) \\ &\quad (\text{en divisant par } 2k^2 I_k I_{k-1} \neq 0) \\ \frac{1}{2k^2} &= \frac{-J_k I_{k-1} + I_k J_{k-1}}{I_k I_{k-1}} \\ &= -\frac{J_k I_{k-1}}{I_k I_{k-1}} + \frac{I_k J_{k-1}}{I_k I_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2k^2} = -\frac{J_k}{I_k} + \frac{J_{k-1}}{I_{k-1}}.$$

c)

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ J_0 &= \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} \right)^3 = \frac{\pi^3}{24}. \\ I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$