CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On tire, au hasard et sans remise, les jetons un à un. La suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des numéros tirés est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Étant donné deux entiers k et p vérifiant $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, la suite $(a_k, \ldots, a_p)$ — se réduisant à (a_k) dans le cas où k est égal à p — est appelée sous-suite de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé longueur de cette sous-suite.

On admettra que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω, ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, ce qui signifie que, pour toute permutation ω de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n!}$.

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $\mathrm{E}(X)$ son espérance et $\mathrm{V}(X)$ sa variance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $\mathrm{Cov}(X, Y)$ leur covariance.

Préliminaire

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, m\}$ où m est un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer l'égalité : $\quad \mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}([X \geqslant k])$.

Partie 1 : Première sous-suite croissante

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, la première sous-suite croissante est définie de la façon suivante : dans le cas $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; dans le cas contraire, k étant le plus petit entier de $\{1, \ldots, n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est $(a_1, \ldots, a_k)$.

Soit L la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ qui, à toute permutation ω, associe la longueur de sa première sous-suite croissante.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme $2 < 3 < 5$ et $5 > 4$, on a : $L(\omega) = 3$.

1) a) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L ? Que vaut $\mathbf{P}([L = n])$?

b) Montrer que, pour tout entier k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L \geqslant k]) = \dfrac{1}{k!}$. En déduire la loi de L.

2) Donner la valeur de $\mathrm{E}(L)$ sous forme d'une somme et déterminer la limite de $\mathrm{E}(L)$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Deuxième sous-suite croissante

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ et sa première sous-suite croissante $(a_1, \dots, a_k)$; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k = n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas ; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ est appelée deuxième sous-suite croissante de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4, 9)$ et l'on a : $L'(\omega) = 2$.

1) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L' ? Que vaut $\mathbf{P}([L' = 0])$?

2) On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.

   a) Montrer que la loi du couple (L, L') est donnée par le tableau suivant :

L' \ L	1	2	3
0	0	0	1/6
1	1/6	1/3	0
2	1/3	0	0

   b) Donner la loi de L' et calculer son espérance.

   c) Calculer la covariance de L et de L'. Pouvait-on prévoir le signe de cette covariance ?

3) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

   a) Dénombrer les parties de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ distinctes de $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n-1\}$.

   b) En déduire $\mathbf{P}([L + L' = n])$.

   c) Montrer de même que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L + L' \geqslant k]) = \dfrac{2^k - k}{k!}$.

   d) Donner la valeur de $\mathrm{E}(L + L')$ sous forme d'une somme.

   e) En déduire $\mathrm{E}(L')$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

Partie 3 : Nombre de sous-suites croissantes

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, si sa deuxième sous-suite croissante existe et ne se termine pas par a_n, on définit la troisième sous-suite croissante à l'instar de la deuxième, etc., jusqu'à ce que l'on ait défini une sous-suite croissante se terminant par a_n.

Soit T la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe le nombre de ses sous-suites croissantes.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme les sous-suites croissantes sont $(2, 3, 5), (4, 9), (6, 7, 8)$ et (1), on a : $T(\omega) = 4$.

1) a) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 2. Calculer son espérance et sa variance.

   b) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 3. Calculer son espérance et sa variance.

2) On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 4.

   a) Calculer $\mathbf{P}([T = 1])$ et $\mathbf{P}([T = n])$.

   b) Comparer les événements $[L + L' = n]$ et $[T \leqslant 2]$. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T = 2])$.

   c) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 4. Calculer son espérance et sa variance.

3) Pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, soit A_i l'événement égal à l'ensemble des permutations $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$, et soit X_i la variable aléatoire qui, à toute permutation ω, associe 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.

   a) Montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Donner son espérance et sa variance.

   b) Donner une expression de T en fonction de X_i. En déduire l'égalité : $\mathrm{E}(T) = \dfrac{n+1}{2}$.

   c) Montrer que l'on a : $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \dfrac{1}{6}$. En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})$.

   d) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leqslant i < i + 2 \leqslant j \leqslant n - 1$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
   En déduire l'égalité : $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

e) Établir enfin l'égalité : $V(T) = \frac{n+1}{12}$.

4) On suppose maintenant que n est égal à 5. On considère 1000 variables aléatoires $T_1, \dots, T_{1000}$, mutuellement indépendantes, de même loi que la variable T et on note S la variable aléatoire égale à $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} T_i$.

On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée suivante : $\phi(\sqrt{5}) \simeq 0,987$.

Calculer une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}([2,95 < S < 3,05])$.

Partie 4 : Simulation informatique

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction **random** renvoie, pour un argument m de type **integer** vérifiant $m \geqslant 1$, un nombre entier aléatoire compris entre 0 et $m-1$ (cette fonction est initialisée au début du corps principal du programme par la procédure **randomize**).

On rappelle que, dans l'exécution d'une boucle **for i :=n downto 2**, i prend successivement les valeurs $n, n-1, \dots, 2$.

Dans un programme écrit en PASCAL, figurent la déclaration **type** `tableau` = **array** [1..5] **of integer** ; et la procédure :

```
procedure aleatoire(var A :tableau);
var aux,i,alea : integer;
begin
        for i :=1 to 5 do A[i] :=i ;
        for i :=5 downto 2 do begin
                                  alea := random(i)+1 ;
                                  aux :=A[alea] ;
                                  A[alea] :=A[i] ;
                                  A[i] :=aux ;
                              end
end;
```

1) a) On suppose que les valeurs successives de **alea** sont 4, 2, 3 et 2. Donner les valeurs de `A[1]`, `A[2]`, `A[3]`, `A[4]` et `A[5]` à la fin de l'exécution de la procédure.

b) Quelles valeurs successives doit prendre **alea** pour obtenir, à la fin de l'exécution de la procédure le tableau : `A[1]=3, A[2]=5, A[3]=2, A[4]=4, A[5]=1` ?

c) Expliquer pourquoi la procédure ci-dessus permet de simuler l'expérience aléatoire définie au début du problème.

2) Écrire une fonction d'en-tête **function** `T(A :tableau) :`**integer** ; qui renvoie le nombre de sous-suites croissantes du tableau `A` correspondant à une permutation de $\{1, \dots, 5\}$.

3) On suppose que le programme contient les déclarations **var** `A :tableau` ; **var** `k :`**integer** ; **var** `S :`**real** ; et que le corps principal du programme est le suivant :

```
begin
      randomize;
      S :=0 ;
      for k :=1 to 1000 do begin
                              aleatoire(A) ;
                              S :=S+T(A) ;
                          end;
      S :=S/1000 ;
      writeln(S) ;
end.
```

Après exécution du programme la valeur affichée de `S` est 2,98. Ce résultat est-il étonnant ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

HEC, EM.LYON, ESCP-EAP

CORRIGE

HLP II

PRELIMINAIRES.

Rappelons que $\forall k \in [\![1;m]\!]$, $(X \geq k) = (X = k) \cup (X \geq k+1)$, les deux derniers événements étant disjoints.

$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X \geq k+1)$, donc

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1).$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{m} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} k\Big(P(X \geq k) - P(X \geq k+1)\Big) \\ & \sum_{k=1}^{m} kP(X \geq k) - \sum_{k=1}^{m} kP(X \geq k+1) \end{aligned}$$

Posons $i = k+1$ dans la seconde somme, donc $k = i - 1$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{m} kP(X \geq k) - \sum_{i=2}^{m+1} (i-1)P(X \geq i)$$

Notons que $P(X \geq m+1) = 0$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{m} kP(X \geq k) - \sum_{i=2}^{\underline{m}} (i-1)P(X \geq i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} kP(X \geq k) - \sum_{\underline{k=2}}^{m} (k-1)P(X \geq k) \end{aligned}$$

(car l'indice i est en fait muet)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{m} kP(X \geq k) - \sum_{k=2}^{m} kP(X \geq k) + \sum_{k=2}^{m} P(X \geq k) \\ &= P(X \geq 1) + \sum_{k=2}^{m} P(X \geq k) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } E(X) = \sum_{k=1}^{m} P(X \geq k).}$$

PARTIE–I

QUESTION–1

a)

• Si $a_1 > a_2$, la première sous-suite croissante est (a_1) et $L = 1$. C'est la valeur minimale prise par L.

Si $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $L = n$. C'est la valeur maximale de L car L ne peut pas dépasser le nombre d'entiers que l'on range.

• Remarquons qu'il n'y a qu'une façon de ranger les entiers de 1 à n dans l'ordre strictement croissant, c'est lorsque $\forall i \in [\![1; n]\!],\ a_i = i$.

$$\boxed{P(L = n) = \frac{1}{n!}\cdot}$$

b)

Pour construire une suite qui réalise l'événement $L \geq k$ $(1 \leq k \leq n)$, on peut opérer ainsi :

i) On chosit k entiers dans l'intervalle $[\![1; n]\!]$,

ii) on les range dans l'ordre strictement croissant ; on forme ainsi les k premiers termes de la suite.

iii) On range de toutes les manières possibles les $n-k$ nombres qu'il reste et qui vont compléter la suite.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k premiers termes **i)**, il y a une seule façon de les ranger dans l'ordre strictement croissant **ii)** et il y a $(n-k)!$ façons de ranger les derniers termes **iii)**.

Il y a $\binom{n}{k} \times (n-k)! = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times (n-k)! = \dfrac{n!}{k!}$ listes dans l'événement $(L \geq k)$.

Remarque 1 : A partir du moment où **i)** et **ii)** sont réalisés, on est sûr de réaliser $L \geq k$.

Remarque 2 : On aurait pu regrouper les deux premiers points en disant qu'il y a $\binom{n}{k}$ suites strictement croissantes de k nombres pris entre 1 et n (c'est un résultat du cours).

Pour avoir la probabilité de cet événement il faut diviser par $n!$, donc

$$\boxed{\forall k \in [\![1; n]\!],\ P(L \geq k) = \frac{1}{k!}\cdot}$$

On sait que $P(L = k) = P(L \geq k) - P(L \geq k+1)$ (cf calcul des préliminaires)

Si $k = n$, on sait déjà que $P(L = n) = \dfrac{1}{n!}$; résultat en conformité avec l'égalité précédente car $P(L \geq n+1) = 0$. En résumé :

$$\boxed{P(L = n) = \frac{1}{n!}\ ;\ P(L = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \text{ si } 1 \leq k \leq n-1.}$$

QUESTION–2

D'après la partie préliminaire, $E(L) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(L \geq k)$, donc

$$\boxed{E(L) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.}$$

On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(L) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1.}$$

PARTIE–II

QUESTION–1

S'il n'y a pas de deuxième sous-suite croissante, alors $L' = 0$. C'est la valeur minimale prise par L'.

Les valeurs prises par L' sont **des** entiers de $[\![0;n]\!]$ car L' ne peut pas être supérieure au nombre total d'entiers rangés.

Cependant L' ne peut valoir n, car cela signifierait que tous les entiers de 1 à n sont rangés dans la seconde suite. Il n'y aurait pas de première suite strictement croissante, ce qui est impossible.

Donc $\boxed{L'(\Omega) \subset [\![0;n-1]\!].}$

Considérons la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = (n, 2, 3, \ldots, n-2, n-1)$. On a alors $L = 1$ et $L' = n-1$. **La valeur maximale prise par L' est $n-1$.**

Comme on l'a dit plus haut, l'événement $(L = n)$ est aussi l'événement $(L' = 0)$. Donc

$$\boxed{P(L' = 0) = \frac{1}{n!}.}$$

QUESTION–2

a)

D'après l'étude générale précédente, la seule suite réalisant $(L' = 0)$ est $(1, 2, 3)$. Donc $P(L' = 0, L = 3) = \frac{1}{6}$; et $(L' = 0, L = 1)$ ainsi que $(L' = 0, L = 2)$ sont des événements impossibles. Ce qui justifie la première ligne.

Il reste alors $3! - 1 = 5$ listes à considérer :

Les listes $(1, 3, 2)$ et $(2, 3, 1)$ pour lesquelles $(L' = 1, L = 2)$.

Les listes $(3, 1, 2)$ et $(2, 1, 3)$ pour lesquelles $(L' = 2, L = 1)$.

La liste $(3, 2, 1)$ pour laquelle $(L' = 1, L = 1)$.

On retrouve bien $P(L' = 1, L = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(L' = 1, L = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(L' = 1, L = 3) = \frac{1}{6}$; les autres étant nulles.

b)

La loi de L' s'obtient comme **loi marginale** en utilisant le résultat général :

$$P(L' = k) = \sum_{i=1}^{3} P(L' = k, L = i).$$