www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

EMLYON
European Entrepreneurial Learning

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 14 mai 2001 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

LES ANNALES

EXERCICE 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A.

2.a. Calculer A^2, A^3, A^4.

b. Établir que 0 est la seule valeur propre de f.

c. Déterminer la dimension du noyau de f.

d. Est-ce que f est diagonalisable ?

3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

a. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

EXERCICE 2

On considère l'application $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

d. En déduire que f est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$.

e. Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

2. a. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2).$$

b. Étudier les variations de la fonction $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0;+\infty[$, par :

$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2.$$

En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0$.

c. En déduire le sens de variation de f. On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

b. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.

c. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|.$$

d. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

LES ANNALES

EXERCICE 3

1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\, t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0\,. \end{cases}$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0; +\infty[, \ \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-x} x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$

c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

d. Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. Pour tout entier naturel n, on définit une variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$ vérifient :

$$\mathrm{E}(X_n) = n + 1, \quad \mathrm{V}(X_n) = n + 1.$$

b. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes :

$$\int_0^4 f_4(t)\,\mathrm{d}t \approx 0,37 \qquad \int_0^6 f_4(t)\,\mathrm{d}t \approx 0,71 \qquad \int_0^8 f_4(t)\,\mathrm{d}t \approx 0,90.$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4.

Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $\mathrm{P}(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $\mathrm{P}(4 < X_4 \leqslant 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.

On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

a. Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la $n^{\text{ième}}$ voiture au péage à partir de l'instant 0.

b. Soient $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier l'égalité de l'évènement $(Z_n \leqslant t)$ et de l'évènement $(Y_t \geqslant n)$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

LYON MATH III

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION–1

Les deux premières lignes de la matrice A sont égales : A n'est pas inversible. On sait - c'est un résultat du cours que -

λ valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I$ n'est pas inversible, donc 0 **est valeur propre de A si et seulement si $A-0I=A$ n'est pas inversible.**

Remarque : On peut aussi - mais cela peut laisser penser que l'on ne connait pas très bien son cours - effectuer $L_1 \longleftarrow L_2,\ L_3 \longleftarrow L_4,\ L_4 \longleftarrow L_1$, on obtient la matrice équivalente $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis on effectue $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et l'un des termes diagonaux est nul : la matrice n'est pas inversible.

QUESTION–2

a)

Il suffit de faire le calcul, on trouve

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^4=(0).$$

b)

Soit λ une valeur propre de A ; il existe donc une colonne $X \neq (0)$ telle que $A=\lambda X$

$A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda^2 X$;

$A^3X=A^2(AX)=A^2(\lambda X)=\lambda A^2X=\lambda^3 X$. De mme

$$A^4X=\lambda^4 X \qquad \textbf{(1)}$$

Or $A^4=(0)$, donc $A^4X=(0)$. L'égalité **(1)** devient $\lambda^4 X=(0)$. Or $X\neq(0) \Longrightarrow \lambda^4=0$, soit $\lambda=0$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Conclusion : λ valeur propre de $A \Longrightarrow \lambda = 0$.
0 est donc la seule valeur propre possible de A.

Remarque : $A^4 = (0)$ indique que le polynôme $P = X^4$ est un polynôme annulateur de A et l'on sait que les valeurs possibles de A sont **nécessairement** racines de P : la seule valeur porpre possible de A est donc $\lambda = 0$

c)

$u = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow AX = (0)$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Cette équation équivaut au système : $\begin{cases} x - t &= 0 \\ x - t &= 0 \\ y - t &= 0 \\ z - t &= 0 \end{cases}$

Donc $x = y = z = t$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y = z = t\} \\ &= \{u = (x, x, x, x) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est générateur de $\operatorname{Ker} f$, il est non nul ; il en forme donc une base.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}\big((1, 1, 1, 1)\big) \ : \ \dim \operatorname{Ker} f = 1.}$$

d)

On sait que $\operatorname{Ker} f = E_0(f)$ (sous-espace propre associé à la valeur zéro).

$$\boxed{\dim E_0(f) = 1 < 4 = \dim \mathbb{R}^4, \text{ donc } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

QUESTION–3

a)

$\varepsilon_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1)$. Il suffit de faire le calcul puisque $\varepsilon_{i+1} = f(\varepsilon_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Soit P la matrice des quatre vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On sait que **la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si la matrice P est inversible.**

$$\text{Or } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont **aucun** des termes diagonaux n'est nul : P est inversible.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4 \ .}$$

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.