ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

INSEEC OPTION ECONOMIQUE

ENONCE

EXERCICE–1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.

2) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

3–a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

b) En déduire l'existence d'une matrice diagonale A' telle que $A = PA'P^{-1}$.

4) Dans cette question, on s'intéresse aux solutions de l'équation matricelle : $M^3 = A$ **(*)**, où M est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

a) Montrer que si M vérifie la relation **(*)**, alors $AM = MA$.

b) On note $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; si la matrice M vérifie la relation **(*)**, déduire de la question précédente que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de M.

c) En déduire l'existence d'une matrice diagonale M' d'ordre 3 telle que l'on ait : $M = PM'P^{-1}$. Quelle relation a-t-on entre les matrices M' et A' ? Conclure.

EXERCICE–2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Un joueur dispose de deux dés ayant chacun six faces, le premier noté A est équilibré, le second noté B est tel que la probabilité d'apparition d'un numéro est proportionnelle à ce dernier, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in [\![1,6]\!],\ P(\{k\}) = \lambda \times k.$$

1–a) Montrer que $\lambda = \frac{1}{21}$.

b) Le joueur lance le dé B ; déterminer la probabilité des événements :

I : ≪ obtenir un chiffre impair ≫ et $P = \overline{I}$: ≪ obtenir un chiffre pair ≫ .

2) Dans cette question le joueur dispose d'une pièce qui amène pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

Soit un entier naturel $n \geq 4$; le joueur lance en premier la pièce, si elle amène pile il lancera n fois de suite le dé A, sinon il lancera n fois de suite le dé B.

a) Quelle est la probabilité de l'événement : ≪ obtenir le chiffre 1, uniquement aux trois premiers lancers ≫ ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement : ≪ obtenir au cours des n lancers, trois fois seulement le chiffre 1 ≫ ?

c) Soit k un entier fixé tel que $2k \leq n$.

i) On considère l'événement E : ≪ les $(2k)$ premiers lancers amènent alternativement les chiffres 1 et 6 dans cet ordre ≫ (le premier lancer amène le chiffre 1, le deuxième le chiffre 6, etc...). Calculer $P(E)$.

ii) On sait que l'événement E est réalisé, quelle est la probabilité que le lancer de la pièce ait donné pile ?

3) Dans cette question le joueur lance toujours le dé B et on s'intéresse à l'apparition pour la première fois de la séquence IP (on obtient pour cette séquence à un lancer un chiffre impair et au lancer suivant un chiffre pair).

On notera : I_k ≪ le chiffre obtenu au k ème lancer est impair ≫ et P_k ≪ le chiffre obtenu au k ème lancer est pair ≫.

On définit la variable aléatoire X égale au numéro du lancer amenant le chiffre pair lors de l'apparition pour la première fois de la séquence IP. Si par exemple au cours des lancers on obtient $P_1 \cap P_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap P_5$, alors $X = 5$.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?

b) Déterminer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; exprimer l'événement $(X = n)$ à l'aide d'événements du type P_i et I_j et montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ P(X = n) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{7}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1-k}$$

d) En déduire que : $\forall n \geq 2,\ P(X = n) = 4\left(\frac{3}{7}\right)^{n} \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1\right]$

e) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

f) Calculer $E(X)$.

EXERCICE–3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Partie I : étude de f

1) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

2–a) Déterminer le développement limité de f en 1 à l'ordre 2. En déduire la dérivabilité de f en 1 et préciser $f'(1)$.

2–b) Etudier localement la position de C par rapport à sa tangente Δ au point d'abscisse 1.

3–a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, calculer $f'(x)$.

b) Etudier sur $]0, +\infty[$ les variations de $\varphi\ :\ x \longmapsto x - 1 - x \ln x$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

c) Dresser le tableau de variations de f et construire dans un même repère C et Δ (on donne $\ln 2 \simeq 0.7$ et $\ln 3 \simeq 1.1$).

Partie II : étude d'une série

Soit n un entier naturel non nul ; on considère la fonction

$$f_n \ : \ [0,1[\to \mathbb{R}, \ x \longmapsto \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

1–a) Soit $x \in [0,1[$, montrer que : $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt$; en déduire :

$$\forall x \in [0,1[, \ 0 \leq f_n(x) \leq x^n \ln(\frac{1}{1-x}) \text{ et } \forall x \in [0, \frac{1}{2}], \ 0 \leq f_n(x) \leq x^n \ln 2$$

b) En déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

c) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx \leq \frac{\ln 2}{n.2^n}$$

2) Par dérivation de

$g \ : \ [0,1[\to \mathbb{R}, \ x \longmapsto \ln(1-x)$ et de $S_n \ : \ [0,1[\to \mathbb{R}, \ x \longmapsto -(x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}) - f_n(x)$

montrer que $\forall x \in [0,1[, \ S_n(x) = g(x)$.

3) Justifier l'égalité : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^k} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx.$

5–a) En raisonnant par majoration, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 2^k}$ converge.

5–b) A l'aide des questions précédentes montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx.$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

INSEEC

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

- On sait que $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans le cas présent, cela donne $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}((-1,-8,9),(0,-8,8))$ car $f(e_2) = (0,0,0)$ d'après la deuxième colonne de A.

La famille $((-1,-8,9),(0,-8,8))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$; elle est libre car les triplets ne sont pas proportionnels.

$$\boxed{\text{La famille } ((-1,-8,9),(0,-8,8)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f \text{ ; } \dim \operatorname{Im} f = 2.}$$

- **Appliquons le théorème du rang** :

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3.$$

On en déduit $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$. Or on sait que e_2 appartient à $\operatorname{Ker} f$ puisque $f(e_2) = (0,0,0)$. **Le vecteur e_2 est un vecteur non nul d'un espace de dimension 1, c'est une base de cet espace.**

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}((0,1,0)) \text{ ; } \dim \operatorname{Ker} f = 1.}$$

QUESTION–2

Soit donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; effectuons $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont aucun des termes diagonaux n'est nul : $\boxed{\text{La matrice } P \text{ est inversible}}$

Pour calculer P^{-1} résolvons le système $Y = PX$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

$$Y = PX \iff \begin{cases} x &= a \\ y - z &= b \\ -x + z &= c \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= a \\ y - z &= b \\ z &= a + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= a \\ z &= a + c \\ y &= b + z = a + b + c \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION–3

a)

λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -8 & -\lambda & -8 \\ 9 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix}$; on effectue $L_3 \longleftrightarrow L_2$; on obtient

$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 8-\lambda \\ -8 & -\lambda & -8 \end{pmatrix}$; on effectue $L_2 \longleftarrow 8L_2 + (8-\lambda)L_3$; on obtient

$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 8(1+\lambda) & -\lambda(8-\lambda) & 0 \\ -8 & -\lambda & -8 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice triangulaire inférieure ; elle n'est pas inversible si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 8$.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A \text{ si et seulement si } \lambda \in \{-1, 0, 8\}.}$$

Notons $E(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

- $(x, y, z) \in E(-1) \iff \begin{cases} 9y &= 0 \\ -8x + y - 8z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 0 \\ z &= -x \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(-1) &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0,\ z = -x\} \\ &= \{u = (x, 0, -x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u = x(1, 0, -1) \ / \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

> $E(-1) = \text{vect}((1, 0, -1)$; le vecteur $(1, 0, -1)$ est générateur de $E(-1)$, il est non nul, il en forme donc une base ; $\dim E(-1) = 1$.

- $E(0) = \text{Ker}\, f$, on le connaît.

> $E(0) = \text{vect}((0, 1, 0))$; le vecteur $(0, 1, 0)$ en est une base : $\dim E(0) = 1$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

- $(x,y,z) \in E(8) \iff \begin{cases} -9x & = 0 \\ 72x & = 0 \\ -8x - 8y - 8z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y+z & = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(8) &= \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0,\ y = -z\} \\ &= \{u = (0,-z,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{E(8) = \text{vect}((0,-1,1)) \ ; \ \dim E(8) = 1.}$$

Remarque **: On peut noter que l'endomorphisme f est diagonalisable parce qu'il admet trois valeurs propres distinctes ou parce que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut celle de $\mathbb{R}^3$.**

b)

Si l'on note $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (0,-1,1)$, on peut affirmer d'après la remarque précédente que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$; la matrice de ces trois vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

(on aurait pu aussi bien déduire que la famille (u_1,u_2,u_3) formait une base de $\mathbb{R}^3$ par le fait que la matrice de ces trois vecteurs est inversible).

D'après le cours on sait que $P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{A'}$.

$$\boxed{\text{Donc } A = PA'P^{-1}.}$$

QUESTION–4

a)

Si $A = M^3$, alors $AM = M^3M = M^4 = MM^3 = MA$. $\boxed{MA = AM \qquad \textbf{(1)}}$

b)

Notons $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 8$ et X_i la colonne propre associée à la valeur propre λ_i (on prendra pour X_i la colonne des coordonnées de u_i dans la base canonique). Dans ces conditions

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ \ AX_i = \lambda_i X_i.$$

Multiplions l'égalité **(1)** du a) par X_i à droite, il vient $MAX_i = AMX_i$; cette égalité équivaut successivement à

$M(\lambda_i X_i) = A(MX_i)$, puis $\lambda_i MX_i = A(MX_i)$. Cette dernière égalité exprime que la colonne MX_i appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i. Or, d'après la question 3–a), ce sous-espace est de dimension 1 et a pour base X_i.

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R} \ / \ MX_i = \alpha_i X_i.$$

$$\boxed{X_i \neq (0) \text{ et } MX_i = \alpha_i X_i \text{ veut dire que } X_i \text{ est vecteur propre de } M.}$$

c)

Si nous notons g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M, le résultat précédent veut dire que le vecteur u_i est vecteur propre de g associé à la valeur propre λ_i.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

La base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ est constituée de vecteurs propres de g : par définition g est diagonalisable dans la base (u_1, u_2, u_3).

Si l'on pose $M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, on a

$$\boxed{M' = P^{-1}MP \text{ soit (c'est classique) } M = PM'P^{-1}.}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} M^3 &= (PM'P^{-1})(PM'P^{-1})(PM'P^{-1}) \\ &= PM'(P^{-1}P)M'(P^{-1}P)M'P^{-1} \\ &= PM'IM'IM'P^{-1} \\ &= PM'^3P^{-1} \end{aligned}$$

Or $M^3 = A$, donc $A = PM'^3P^{-1}$. Or d'après la question 3–b), on a $A = PA'P^{-1}$. On en déduit

$$PA'P^{-1} = PM'^3P^{-1}.$$

Multiplions cette égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient

$$\begin{aligned} PA'P^{-1} = PM'^3P^{-1} &\iff P^{-1}PA'P^{-1}P = P^{-1}PM'^3P^{-1}P \\ &\iff IA'I = IM'^3I \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'égalité précédente est : } A' = M'^3.}$$

d)

Explicitons matriciellement ce résultat :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1^3 &= -1 = (-1)^3 \\ \alpha_2^3 &= \ \ 0 = \ \ 0^3 \\ \alpha_3^3 &= \ \ 8 = \ \ 2^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= \ \ 0 \\ \alpha_3 &= \ \ 2 \end{cases}$$

Car l'application cube : $t \longmapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Conclusion } M' = B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Récapitulons : nous avons fait le raisonnement suivant : **s'il existe** une solution M à l'équation **(*)**, alors il n'y en a **qu'une** : c'est $PB'P^{-1}$.

Regardons si cette matrice est solution de l'équation **(*)**.

$$\begin{aligned} \left(PB'P^{-1}\right)^3 &= (P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1})^3 \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A. \quad \text{(d'après la question 3–a)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a une seule solution à l'équation (*).}}$$

Explicitement cette solution est

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.