FONCTION DZETA 2 DE RIEMANN

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–26

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout entier $k \geq 0$, les deux intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)dt \text{ et } J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)dt$$

1) Convergence de la suite (J_k/I_k)

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 0$:

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$$

c) Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties l'intégrale I_{k+1}.

d) Déduire des résultats précédents que (J_k/I_k) tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2) Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1} en intégrant par parties $I_k (k \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$

c) Calculer I_0 et J_0 puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$ et montrer que

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$

Autrement dit $S_n + \frac{1}{n}$ ***constitue une valeur approchée de*** S ***à*** $\frac{1}{n^2}$ ***près.***

e) Ecrire un programme Pascal calculant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 26

EXERCICE

QUESTION–1

a) Cette inégalité est due à la concavité de la fonction sin sur l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{2}]$.

Rappelons qu'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle et dont la dérivée seconde est négative est concave : géométriquement cela veut dire que pour tous points A et B de la courbe représentative de f, la portion de courbe comprise entre A et B est au dessus du segment $[A; B]$.

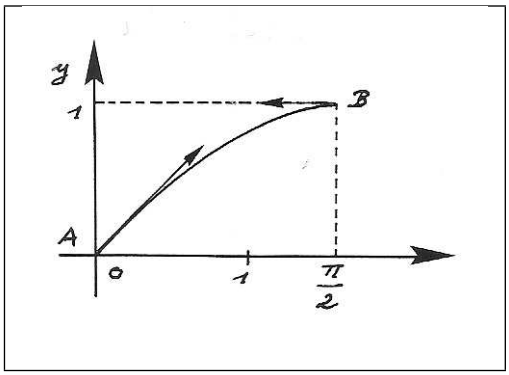
Appliquons ce résultat à la fonction sin sur l'intervalle I.

$\sin'' = -\sin \leq 0$ sur I ; donc sin est effectivement concave sur I.

Considérons les points A et B de coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$. On vérifie facilement qu'ils sont sur la courbe représentative de sin et que la droite (A, B) a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. Pour cela, on peut vérifier que $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$ satisfont à l'équation de la droite.

La concavité donne alors :

$\forall t \in I,\ \sin t \geq \frac{2}{\pi}t$; inégalité équivalente à : $\boxed{\forall t \in I,\ t \leq \frac{\pi}{2}\sin t}$ car $\frac{\pi}{2} > 0$.



• Il existe une autre méthode plus traditionnelle qui consiste à étudier la fonction différence, d, définie sur I par $d(t) = -t + \frac{\pi}{2}\sin t$.

$d'(t) = -1 + \frac{\pi}{2}\cos t$

$d''(t) = -\frac{\pi}{2}\sin t \leq 0$ sur I.

On obtient les tableaux de variations suivants :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$d''(t)$	$-$			$-$	
$d'(t)$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$d'(t)$	$+$			$-$	
d	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On constate que $d(t) \geq 0$ sur I, ce qui est l'inégalité demandée.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.