ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

MERCREDI 16 MAI 2001, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ par $f(x) = 2xe^{x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
   On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Donner les tableaux des variations de f et de f^{-1}.

2. Vérifier qu'il existe dans $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$.
   Montrer que $\alpha \neq 0$.

   On définit la suite $(u_n)_{n \in I\!N}$ par :
   $$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in I\!N, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in \left]0;1\right]$.

4. (a) Montrer que pour tout réel x de $[\ 0\ ;\ 1\ ]$, $f(x) - x \geq 0$.
   Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in I\!N}$ est strictement décroissante.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in I\!N}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.

5. On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de u_n.

   On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$

   (b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$

   (c) Montrer que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et en déduire que la série de terme général u_n est convergente. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.

   (d) Montrer finalement que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-L}}{2^n}$.

EXERCICE 2

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices colonne :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de A.
   A quelles valeurs propres sont-ils associés ?

2. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) Justifier la relation $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

   On note D cette matrice diagonale.

   (c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

3. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in I\!N, \; X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

   A cet effet, on définit pour tout $n \in I\!N$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

   En déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

   (d) Donner finalement la matrice X_n en fonction de n.

EXERCICE 3

1. On pose pour tout entier naturel n non nul l'intégrale : $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$

(a) Calculer pour $A \geq 1$ l'intégrale $\int_1^A \frac{\ln t}{t} dt$ et en déduire que I_1 est divergente.

(b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$.

(c) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. (On donne $\sqrt{e} \approx 1{,}65$)

(d) En déduire grâce à I_2 que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge (On ne cherchera pas à calculer cette série).

2. On considère la fonction g définie sur $I\!R$ par : $\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ g(t) = \dfrac{4 \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

(a) Montrer que g est continue sur $I\!R$ et constitue une densité de probabilité. (On utilisera les résultats de la question 1.(b).)

<u>On nomme dans toute la suite X une variable aléatoire admettant la densité</u> g.

(b) Etudier l'existence et la valeur éventuelles de l'espérance $E(X)$.

(c) La variable X admet-elle une variance ?

3. Etude d'une variable discrète définie à partir de X.

(a) On considère la fonction G définie sur $I\!R$ par $\begin{cases} G(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ G(t) = 1 - \dfrac{2 \ln t}{t^2} - \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

Montrer que G est dérivable sur $I\!R$ puis justifier que G est la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

On note Z la variable aléatoire discrète définie par :

$$Z(\Omega) = I\!N \quad \text{et} \quad Z = [X], \text{ partie entière de } X.$$

On rappelle que si $x \in I\!R^+$ et $k \in I\!N$, $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k+1$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel k, $P(Z = k) = G(k+1) - G(k)$.

(c) En déduire par récurrence sur l'entier naturel n que :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(Z = k) = -(n+1)[1 - G(n+1)] + \sum_{k=0}^{n} (1 - G(k+1))$$

(d) Montrer que $(1 - G(k))$ est équivalent en $+\infty$ à $\frac{2 \ln k}{k^2}$

(e) Déduire de l'ensemble des résultats obtenus que Z admet une espérance.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ESC

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

La fonction f est continue, dérivable sur $[0,1]$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \ f'(x) = 2(x+1)e^x.}$$

Le tableau de variations de f est immédiat.

x	0		1
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	2e

> La fonction f est continue, strictement croissante sur $[0,1]$: elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[0,2e]$, donnée par le tableau de variations.

La bijection réciproque f^{-1} est définie sur $[0,2e]$, elle est **strictement croissante comme** f ; de plus f' n'est jamais nulle sur $[0,1]$, donc f^{-1} est dérivable sur $[0,2e]$. On obtient le tableau de variations de f^{-1} facilement.

x	1		2e
$(f^{-1})'(x)$		+	
f^{-1}	0	$\nearrow$	1

QUESTION–2

La fonction f étant une bijection de $[0,1]$ sur $[0,2e]$, tout élément de $[0,2e]$ admet un unique antécédent dans $[0,1]$ par f. En particulier 2 admet un unique antécédent α, qui vérifie :

$$f(\alpha) = 2 \iff 2\alpha e^\alpha = 2 \iff \alpha e^\alpha = 1.$$

$$\boxed{\exists !\ \alpha \in [0,1]\ /\ \alpha e^\alpha = 1.}$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

Remarque : f^{-1} est strictement croissante sur $[0, 2e]$;
$0 < 2 \Longrightarrow f^{-1}(0) < f^{-1}(2)$. Or $f^{-1}(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$ et $f^{-1}(2) = \alpha$ puisque $f(\alpha) = 2$.
Conclusion : $\boxed{0 < \alpha}$

QUESTION–3

Montrons par récurrence la propriété P_n " $u_n \in]0, 1]$. "
Initalisation :
$u_0 = \alpha \in]0, 1]$ d'après la question précédente.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, tel que P_n soit vérifiée.
Puisque $]0, 1] \subset]0; 2e]$ et que f^{-1} est strictement croissante sur $]0, 2e]$, on conclut que

$$0 < u_n \leq 1 \Longrightarrow f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(2e).$$

On sait déjà que $f^{-1}(0) = 0$; de même $f^{-1}(2e) = 1$ puisque $f(1) = 2e$. L'encadrement précédent s'écrit alors $0 < u_{n+1} \leq 1$. La propriété est héréditaire : **d'après le principe du raisonnement par récurrence, on conclut**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} \leq 1.}$$

QUESTION–4

4–a)

$\forall x \in [0, 1],\ f(x) - x = x(2e^x - 1)$.

Or $x \geq 0 \Longrightarrow e^x \geq 1$ **par croissance de l'exponentielle** ; donc $2e^x \geq 2 > 1$. Il s'ensuit que $(2e^x - 1) > 1$ sur $[0, 1]$. Et puisque $x \geq 0$, $x(2e^x - 1) \geq 0$.

$$\boxed{\forall x \in [0, 1],\ f(x) - x \geq 0.}$$

Précisons un peu :
Si $x = 0$, alors $x(2e^x - 1) = 0$, ie $f(x) - x = 0$.
Si $x > 0$, alors $2e^x - 1 \geq 1 > 0$, donc $f(x) - x = x(2e^x - 1) > 0$.

$$\boxed{\forall x \in [0, 1],\ f(x) - x \geq 0 \text{ et } f(x) - x = 0 \text{ si et seulement si } x = 0.}$$

4–b)

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \Longleftrightarrow u_n = f(u_{n+1})$. Alors
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - f(u_{n+1})$. Or $u_{n+1} \in]0; 1]$, d'après la question 3, donc d'après le a) $u_{n+1} - f(u_{n+1}) < 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0 \text{ ; la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

4–c)

D'après le **théorème des suites monotones, bornées, la suite** (u_n) **est décroissante, minorée par** 0**, donc elle converge.**

Si on note ℓ sa limite, $0 < u_n \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \ell \leq 1$ car n'oublions pas qu'à la limite les inégalités strictes deviennent larges.

Or f est continue sur $[0, 1]$, donc donc elle est continue au point ℓ et l'égalité $u_n = f(u_{n+1}) \Longrightarrow \ell = f(\ell)$. D'après la question 4–a), le seul point $\ell \in [0, 1]$ qui convient est $\ell = 0$.