BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème I

Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n \mathrm{e}^{-t^2} = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

On admet dans tout le problème : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!}\sqrt{\pi}$.

EM LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Industrie de Lyon.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad F(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2.$

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

3. Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \big|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda \cos a\big| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}.$

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$

b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad S'(x) = C(x)$.

4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} S(x).$

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad 2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t.$

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad S(x) = \dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t \quad$ et $\quad C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t.$

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\quad g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$

2.a. Montrer, pour tout $u \in [0\,;+\infty[$: $\quad 0 \leqslant (1 - u + u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3.$

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t - g(x) \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6.$

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.
On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
On note $f^0 = \mathrm{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b. En déduire : $\forall j \in [\![1; n-1]\!]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1f + a_0\mathrm{id}$.

a. Vérifier : $g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + \mathrm{I}_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

3.a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0 \,\mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$. Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P.
Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda \,\mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - x\mathrm{I}_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. *Application* 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. *Application* 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^{\mathrm{t}}C$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

EM LYON 2006 VOIE S

CORRIGE

PROBLEME I

PRELIMINAIRES

1–a)

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}\exp(-t^2) = \lim\limits_{t\to+\infty} (t^2)^{\frac{n+2}{2}}\exp(-t^2) = 0$. Ce qui se traduit par :

$$\boxed{t^n\exp(-t^2) \underset{(+\infty)}{=} \circ(\frac{1}{t^2})}$$

1–b)

Posons $f_n(t) = t^n\exp(-t^2)$. On constate facilement que f_n a la même parité que n : **l'intégrale** $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ **converge si et seulement si l'intégrale** $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ **converge.**

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge, on en déduit par négligeabilité que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge (la fonction f_n étant continue sur $\mathbb{R}^+$, l'intégrale $\int_0^1 f_n(t)dt$ existe)

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\exp(-t^2)dt \text{ est convergente}}$$

2)

Si $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ avec $a_n \neq 0$, on a $P(t) \underset{(+\infty)}{\sim} a_n t^n$, donc $|P(t)| \underset{(\pm\infty)}{\sim} |a_n t^n|$ et puisque $\exp(-t^2) > 0$, on a également $|P(t)\exp(-t^2)| \underset{(\pm\infty)}{\sim} |a_n t^n|\exp(-t^2)$. La fonction $t \longmapsto |a_n t^n|\exp(-t^2)$ est une fonction paire, donc la convergence de $\int_0^{+\infty}|a_n t^n|\exp(-t^2)dt = \int_0^{+\infty}|a_n|t^n\exp(-t^2)dt$ implique celle de $\int_{-\infty}^{+\infty}|a_n t^n|\exp(-t^2)dt$

En changeant a_n en $|a_n|$, on vient de voir, l'intégrale $\int_0^{+\infty}|a_n|t^n\exp(-t^2)dt$ converge, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|a_n t^n|\exp(-t^2)dt$ est convergente.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Par la règle d'équivalence des fonctions continues positives, on conclut que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)| \exp(-t^2)dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\exp(-t^2)dt \text{ est absolument convergente, donc convergente}}$$

3–a)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; posons $I_{n+2}(a,b) = \int_a^b t^{n+2}\exp(-t^2)dt$ et intégrons par parties.

$u(t) = t^{n+1} \Longrightarrow u'(t) = (n+1)t^n$; $v'(t) = t\exp(-t^2) \Longleftarrow v(t) = -\frac{1}{2}\exp(-t^2)$. les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, ce qui légitime l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_{n+2}(a,b) &= \Big[-\frac{t^{n+1}\exp(-t^2)}{2}\Big]_a^b + \frac{n+1}{2}\int_a^b t^n\exp(-t^2)dt \\ &= -\frac{b^{n+1}\exp(-b^2)}{2} + \frac{a^{n+1}\exp(-a^2)}{2} + \frac{n+1}{2}\int_a^b t^n\exp(-t^2)dt \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{a\to-\infty} a^{n+1}\exp(-a^2) = 0$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{n+1}\exp(-b^2) = 0$;

de plus $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b t^n\exp(-t^2)dt = I_n$ qui existe : on peut donc passer à la limite dans l'égalité précédente en faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$. On obtient le relation

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n}$$

3–b)

On sait (c'est un résultat du cours) que lorsqu'une fonction f est impaire et que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, cette intégrale vaut 0

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = 0}$$

3–c)

Montrons l'égalité par récurrence:

Initialisation : pour $p = 0$, on nous donne $I_0 = \sqrt{\pi}$; $\frac{(2\times 0)!}{2^0.0!}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$: l'égalité est satisfaite.

Hérédité : supposons que, pour un entier p donné on ait : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}.p!}\sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2}I_{2p} \\ &= \frac{2p+1}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}.p!}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+1}p!2(p+1)}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{2(p+1)!}{2^{2(p+1)}(p+1)!}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire :

$$\boxed{\text{par principe du raisonnement par récurrence : } \forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}.p!}\sqrt{\pi}}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.