BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE EPREUVE :

280
HEC_M1_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 3 Mai 2006, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note A^T la transposée de A.

Dans tout le problème, pour n dans $\mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire de deux vecteurs X et Y étant noté $\langle X,Y\rangle$ ou Y^TX.

Pour tout vecteur $X=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1}\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, sa norme est donnée par $||X||=\sqrt{X^TX}=\left(\sum_{k=0}^{n-1}x_k^2\right)^{1/2}$.

Le module et le conjugué d'un nombre complexe z sont notés respectivement $|z|$ et $\overline{z}$. On rappelle que $|z|^2=z\overline{z}$. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ est noté i.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la matrice $H_n=(h_{k,j}^{(n)})_{1\leqslant k,j\leqslant n}$ (appelée matrice de Hilbert) de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de terme générique $h_{k,j}^{(n)}=\dfrac{1}{k+j-1}$, les entiers k et j décrivant $[\![1,n]\!]$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice H_n s'écrit donc :

$$H_n=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Préliminaire

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque notée arctan. On note (arctan)′ sa dérivée.

1. a) Pour tout réel x, rappeler l'expression de (arctan)′(x) en fonction de x.

b) Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

c) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}^{+}$, l'encadrement : $0 \leqslant \arctan x \leqslant x$.

2. a) Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit U une variable aléatoire réelle de densité ψ. On note F sa fonction de répartition. Déterminer la loi de la variable aléatoire $F(U)$.

c) On rappelle que la fonction Pascal `random` rend un nombre aléatoire de l'intervalle $[0, 1]$ suivant une loi uniforme sur cet intervalle. Écrire, dans le langage Pascal, une fonction `Cauchy` simulant la variable aléatoire U.

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

1. Calculer, pour tout couple (k, j) de $[\![1, n]\!]^2$, l'intégrale $\int_0^1 t^{k+j-2} dt$.

En déduire, pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, l'égalité : $X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1})^2 dt$.

2. a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs, et d'une matrice orthogonale P telles que : $H_n = PDP^T$.

b) On désigne par α_n (resp. β_n) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de H_n.
Montrer, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, l'encadrement suivant :

$$\alpha_n ||X||^2 \leqslant X^T H_n X \leqslant \beta_n ||X||^2$$

3. On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n.
a) Soit Y un vecteur de $\mathcal{V}$. Montrer que $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$.

b) Réciproquement, soit Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$. Montrer que Y appartient à $\mathcal{V}$.

4. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_0.

a) Établir l'inégalité : $|X_0|^T H_n |X_0| \geqslant X_0^T H_n X_0$.

b) En déduire que $|X_0|$ est un élément de $\mathcal{V}$.

c) Montrer que les composantes du vecteur $H_n|X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que le vecteur X_0 n'a aucune composante nulle.

d) En utilisant le fait que $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$, montrer que les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

5. a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ orthogonaux.

b) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

On rappelle que β_n désigne la plus grande valeur propre de la matrice H_n.

1. Soit $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de H_n associé à β_n. Soit Z le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $Z = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $Z^T H_{n+1} Z = X'^T H_n X'$. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies et continues sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta$ par :

$$\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta = \int_a^b \varphi_1(\theta)d\theta + i\int_a^b \varphi_2(\theta)d\theta$$

et on rappelle que pour tout réel x, on a : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{Z}$, les deux nombres complexes : $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$ et $\int_0^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$.

b) Montrer, pour tout entier p de $\mathbb{N}$, l'égalité : $\int_{-1}^{1} x^p dx = -i\int_0^{\pi} e^{i(p+1)\theta}d\theta$.

c) En déduire, pour tout polynôme P à coefficients complexes, l'égalité : $\int_{-1}^{1} P(x)dx = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.

d) Dans le cas où P est un polynôme à coefficients réels, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$$

Dans les questions 3 et 4, on désigne par $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^n$.

3. a) Établir l'encadrement : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \int_{-1}^{1} (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que l'on a : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \cdots + x_{n-1}e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta$.

4. a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(\theta) = \left|\sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\theta}\right|^2$.

Montrer que φ est 2π–périodique et paire ; en déduire l'égalité : $\int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)d\theta$.

b) Établir l'inégalité : $X^T H_n X \leqslant \pi ||X||^2$.

c) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

Dans cette partie, le vecteur W de $\mathbb{R}^n$ est défini par $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$.

1. Montrer les égalités suivantes :

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt$$

2. En déduire, pour $n \geqslant 2$, l'inégalité suivante :

$$W^T H_n W \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}$$

(on pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes)

Dans les questions suivantes, p est un entier supérieur ou égal à 2.

3. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0,p[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(p-x)}}$.

b) En déduire, quelle que soit la parité de p, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geqslant \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = \dfrac{p}{1+t^2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$, et établir la relation :

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$$

5. On pose : $u_p = \dfrac{1}{p-1}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$. Montrer que la série de terme général u_p est convergente.

6. a) Montrer que $||W||^2$ est équivalent à $\ln n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

HEC 2006 VOIE S

CORRIGE

PRELIMINAIRES

1–a)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

1–b)

Soit $v\ :\ x \longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0,\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$

L'application v est constante sur $]0,+\infty[$, donc $\forall x > 0,\ v(x) = v(1) = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$$

1–c)

Sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction tan est strictement croissante et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc la fonction arctan est strictement croissante et prend ses valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan x \geq 0}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$. La fonction arctan est donc concave ; sa courbe représentative est au dessous de ses tangentes, en particulier au dessous de la tangente au point $(0,0)$.

Cette tangente a pour équation $y = \arctan' 0 \times x$, c'est-à-dire $y = x$; d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(x) \leq x}$$

2–a)

La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$ (inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) **(1)**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) \geq 0 \quad \textbf{(2)}$$

La fonction ψ est paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx$ converge (ou existe) si et seulement si $\int_0^{+\infty} \psi(x)dx$ converge et, dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 2\int_0^{+\infty} \psi(x)dx$. Or

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autrement que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\psi(x)dx &= \lim_{B\to+\infty}\int_0^B \frac{dt}{\pi(1+t^2)}\\ &= \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\pi}\Big[\arctan t\Big]_0^B\\ &= \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\pi}(\arctan B-\arctan 0)\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx = 2\times\frac{1}{2}=1 \qquad \textbf{(3)}$$

Les propriétés **(1)**, **(2)**, **(3)** impliquent que ψ est une densité de probabilité

2–b)

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ F(x) &= \int_{-\infty}^{x}\psi(t)dt\\ &= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\pi}\Big[\arctan t\Big]_B^x\\ &= \frac{1}{\pi}(\arctan x-(-\frac{\pi}{2}))\\ &= \boxed{\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Posons $V=F(U)$.

$U(\Omega)=\mathbb{R}$ car il existe une densité de U qui est >0 sur $\mathbb{R}$ (c'est ψ) ; alors $V(\Omega)=]0,1[=F(\mathbb{R})$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la fonction de répartition d'une variable à densité. F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}>0$ pour tout réel x, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$; sa fonction réciproque F^{-1} existe et c'est une bijection strictement croissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$

$\forall v\in\mathbb{R},\ P(V\le v)=P(F(U)\le v)$

* Si $v\le 0,\ P(V\le v)=0$
* Si $0<v<1,\ P(V\le v)=1$
* Si $v=1,\ P(V\le v)=P(F(U)\le v)=P(U\le F^{-1}(v))$ (puisque F^{-1} est strictement croissante), donc $P(V\le v)=F(F^{-1}(v))=v$

V suit la loi uniforme sur $]0,1[$; $V\hookrightarrow\mathcal{U}_{]0,1[}$

2–c)

Soit $v\in]0,1[$; $F^{-1}(v)=x\iff v=F(x)\iff v=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$,

donc $x=\tan(\pi v-\frac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{\tan(\pi v)}$

$$\boxed{\forall v\in]0,1[,\ F^{-1}(v)=-\frac{1}{\tan(\pi v)}}$$

Simulation de U

```
Function Cauchy(x:real) : real ;
var y :real ;
Begin
y := random ;
```


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Cauchy:=-1/tan(pi*y) ;
End ;

PARTIE I

REMARQUE : l'énoncé propose A^T au lieu du ${}^tA$ habituel ; nous emploierons cette nouvelle notation.

1)

$$\int_0^1 t^{k+j-2}dt = \left[\frac{t^{k+j-1}}{k+j-1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{k+j-1}}$$

La matrice H_n est symétrique réelle : $\forall (k,j) \in \left([\![1,n]\!]\right)^2,\ h_{k,j}^{(n)} = h_{j,k}^{(n)}$, alors

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n h_{k,j}^{(n)}.x_{k-1}x_{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{k+j-1} x_{k-1}x_{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^{k+j-2} x_{k-1}x_{j-1}dt \end{aligned}$$

Cette double somme, qui donne les valeurs de $X^T H_n X$, est finie, on peut donc utiliser la linéarité de l'intégration et ainsi,

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n t^{k+j-2} x_{k-1}x_{j-1}\Big)dt \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n t^{k-1} x_{k-1} t^{j-1} x_{j-1}\Big)dt \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n t^{k-1} x_{k-1} \underbrace{\sum_{j=1}^n t^{j-1} x_{j-1}}_{S}\Big)dt \\ &= \int_0^1 \Big(S \sum_{k=1}^n t^{k-1} x_{k-1}\Big)dt \\ &= \int_0^1 S^2 dt \end{aligned}$$

Posons $\ell = k-1$, alors $S = \sum_{k=1}^n t^{k-1}x_{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell t^\ell$ et finalement

$$\boxed{X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt}$$

2–a)

La matrice H_n est symétrique réelle, donc **diagonalisable** . Si H_n est associée à un endomorphisme h_n de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors il existe une base orthonormale B' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de h_n dans laquelle la matrice de h_n est une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de h_n (distinctes ou non).

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base B' est une **matrice orthogonale** ($P^T = P^{-1}$) et d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes,

$$\boxed{H_n = PDP^T}$$

Montrons que les valeurs propres de H_n, c'est-à-dire les termes diagonaux de D, sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de H_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$X^T H_n X = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda ||X||^2$ où $||X|| \neq 0$ puisque $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

D'autre part, on a vu au **1)** que $X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 Q(t)^2 dt$ avec $Q(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1} t^{n-1}$.

L'application $t \longmapsto Q(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, donc $\displaystyle\int_0^1 Q(t)^2 dt \geq 0$, ce qui donne $X^T H_n X \geq 0$. Par suite $\lambda ||X||^2 \geq 0$ et puisque $||X||^2 > 0$, il vient $\underline{\lambda \geq 0}$

- Si $\lambda = 0$, c'est que $\displaystyle\int_0^1 Q(t)^2 dt = 0$, donc que $\forall t \in [0,1],\ Q(t)^2 = 0$ (en effet $Q(t)^2 \geq 0$ sur $[0,1]$ et continue), puis $\forall t \in [0,1],\ Q(t) = 0$. Le polynôme Q admet une infinité de racines, il s'ensuit que Q est le polynôme nul et par conséquent $x_0 = \ldots = x_{n-1} = 0$, ce qui implique $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci n'est pas possible car X est un vecteur propre.

Conclusion : $\lambda \neq 0$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \text{spect}(H_n),\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*}$$

2–b)

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; la matrice colonne des coordonnées de X dans la base B' introduite au **2–a)** est $X' = P^{-1}X = P^T X$ d'après le cours, notée $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= X^T PDP^T X = (P^T X)^T D (P^T X) \\ &= X'^T D X' \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x'^2_k \quad \text{car } D \text{ est diagonale} \end{aligned}$$

$\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont les valeurs propres (pas forcément distinctes) de H_n, donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_n \leq \lambda_k \leq \beta_n$.

Il s'ensuit que $\alpha_n x'^2_k \leq \lambda_k x'^2_k \leq \beta_n x'^2_k$ (car $x'^2_k \geq 0$) puis, en sommant ces encadrements, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n x'^2_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x'^2_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \beta_n x'^2_k$, c'est-à-dire $\alpha_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x'^2_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x'^2_k \leq \beta_n \sum_{k=0}^{n-1} x'^2_k$; or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x'^2_k = ||X||^2$ puisque la base B' est orthonormale , donc

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha_n ||X||^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n ||X||^2}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.