PROBABILITES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–28

On rappelle que la fonction arctan est une bijection continue dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit X une variable réelle admettant pour densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On dit alors que X suit la loi de Cauchy.

1) On considère la variable Y définie par :

$$\begin{array}{lcll} Y & = & \ln|X| & \text{si } X \neq 0 \\ Y & = & 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

a) Déterminer la fonction de répartition, F, de X.

b) Déterminer une densité de Y.

c) Montrer que Y admet une espérance et en donner sa valeur.

2)

a) Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$A = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx \quad \text{et} \quad B = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$ et retrouver l'espérance de Y par le théorème du transfert.

 Jean MALLET, Michel MITERNIQUE et France MALLET-ZOUTU © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 28

CORRIGE–28 :

QUESTION–1

a)

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ F(x) &= \int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{\pi(1+t^2)}\\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^x\frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to-\infty}(\arctan(x)-\arctan(a))\end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $\lim\limits_{-\infty}\arctan(a) = -\frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x)+\frac{1}{2}.}$$

b)

$Y(\Omega)=\mathbb{R}$. Soit donc F la fonction de répartition de X,

G la fonction de répartition de Y et g une densité de Y.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ G(x) &= p(Y\le x) = p(\ln|X|\le x)\\ &= p(|X|\le e^x)\quad \textbf{(car } \exp \textbf{ est strictement croissante)}\\ &= p(-e^x\le X\le e^x)\quad \textbf{(car } e^x\ge 0)\\ &= F(e^x)-F(-e^x)\\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(e^x)+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\pi}\arctan(-e^x)+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ G(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(e^x)-\arctan(-e^x)\Big).}$$

• La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; la fonction ψ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition les fonctions $x\longmapsto\arctan(e^x)$ et $x\longmapsto\arctan(-e^x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on peut prendre G' pour g, soit

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x}{1+(e^x)^2}-\frac{-e^x}{1+(-e^x)^2}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x}{1+(e^x)^2}+\frac{e^x}{1+(e^x)^2}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}+\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = \frac{2e^x}{\pi(1+e^{2x})}.}$$

c)

Sous réserve d'existence,

$$E(Y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy = \int_{-\infty}^{0}\frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy+\int_0^{+\infty}\frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy.$$

$E(Y)$ **existe si et seulement si les deux intégrales convergent.**

$$\boxed{\text{Etude de } I = \int_0^{+\infty}\frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy.}$$

Notons $h(y)=\dfrac{ye^y}{e^{2y}+1}$. La fonction h est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$\frac{ye^y}{e^{2y}+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{ye^y}{e^{2y}} = ye^{-y}. \qquad \textbf{(1)}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.