



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



PROBABILITES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-31

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \leq 0, f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(-1+\ln x)^2}.$$

- 1) a) Montrer que, $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2(x))}$.
- b) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
- 3) Déterminer les variations de f et tracer sa représentation graphique.
- 4) a) Montrer que f est une densité de probabilité (on pourra penser à utiliser la loi normale $\mathcal{N}(1, 1)$).

Dans la suite de l'exercice, nous noterons X une variable qui admet f pour densité.

- b) Déterminer la fonction F de répartition de X en fonction de celle, notée Φ , de la loi normale centrée réduite.
- 5) Calculer l'espérance $E(X)$ de X (on pourra, dans l'intégrale, poser $u = \ln x - 2$).

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 31

CORRIGE-31 :

QUESTION-1

a)

$$\begin{aligned}\forall x > 0, (-1 + \ln x)^2 &= \ln^2 x - 2 \ln x + 1. \\ \exp\left(-\frac{1}{2}(-1 + \ln x)^2\right) &= \exp\left(\ln x - \frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right) \\ &= \exp(\ln x) \times \exp\left(-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right) \\ &= x \exp\left(-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right).\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{x \exp\left(-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right)}{x\sqrt{2\pi}}$$

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)}.$$

b)

$$\lim_{0^+} \left(-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right) = -\infty \implies \lim_{0^+} \exp\left(-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right) = 0.$$

$$\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^+} f(x) = f(0) \text{ veut dire } f \text{ est continue en } 0.$$

Or f est continue sur \mathbb{R}_-^* puisque f est nulle sur cet intervalle.

$x \mapsto -\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et à valeurs dans \mathbb{R} ; \exp est continue sur \mathbb{R} . Donc la composée $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)\right)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

La fonction f est continue sur \mathbb{R} .

QUESTION-2

- La même démarche que pour la continuité prouve que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
- **Dérivabilité en 0.**

$$\forall x \leq 0, f(x) = 0 \implies f'_g(0) = 0.$$

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x)}}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1 + \ln^2 x) - \ln x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1 + \ln x)^2}.\end{aligned}$$

$$\lim_{0^+} -\frac{1}{2}(1 + \ln x)^2 = -\infty \implies \lim_{0^+} e^{-\frac{1}{2}(1 + \ln x)^2} = 0.$$

Conclusion du calcul précédent : f est dérivable en 0 à droite et $f'_d(0) = 0$.

Donc f est dérivable en 0 car $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Compte tenu du premier point de la question,

f est dérivable sur \mathbb{R} .