CCP MP I 2008

MECANIQUE

I – Etude sommaire

1) Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

1.a) Deuxième loi de Newton en référentiel galiléen et en projection sur Ox :

$$m\overset{oo}{x} = -kx - \beta\overset{o}{x}$$

Soit : $\boxed{\overset{oo}{x} + 2\lambda\overset{o}{x} + w_0^2 x = 0}$

1.b) En régime pseudo périodique :

$$-\Delta' = \lambda^2 - w_0^2 < 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$-\lambda \pm i\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

Alors : $x(t) = e^{-\lambda t}[\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t]$, si $\boxed{\Omega = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}}$ (pseudo-pulsation)

Avec : $\begin{cases} x(0) = x_0 = a & \alpha = x_0 \\ \overset{o}{x}(0) = 0 = -\lambda a + \beta\Omega & \beta = \dfrac{\lambda}{\Omega} x_0 \end{cases}$

Et finalement : $\boxed{x(t) = x_0 e^{-\lambda t}\left[\cos \Omega t + \dfrac{\lambda}{\Omega} \sin \Omega t\right]}$

1.c) * Δt correspond à 9 oscillations :

$$T = \frac{2\Pi}{\Omega} = \frac{\Delta t}{q} \Rightarrow \boxed{\Omega = 4{,}7\ s^{-1}}$$

$$* \frac{x_1}{x_0} = e^{-\lambda \Delta t} \Rightarrow \boxed{\lambda \Delta \tau = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right)}$$

A.N. : $\underline{\lambda = 2{,}4\ 10^{-2}\ s^{-1}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

* $\underline{\beta = 2\,\lambda m = 4{,}8\ 10^{-3} kgs^{-1}}$

* $\underline{k = m\,(\Omega^2 + \lambda^2) = 2{,}2\ Nm^{-1}}$

2) Mesure d'une accélération

2.a) On applique la 2e loi de Newton dans le référentiel non galiléen lié à l'extrémité E du ressort :

$$m\vec{a}' = -kx\vec{x} - \beta \overset{o}{x}\vec{x} + \underbrace{\vec{Fi}_e}_{-m\overset{oo}{\overrightarrow{OE}}}$$

Ainsi : $\boxed{\overset{oo}{x} + 2\lambda \overset{o}{x} + w_0^2 x = w^2 a \cos wt}$

2.b) En RSF : $(-w^2 + 2\lambda jw + w_0^2)\,\underline{x} = w^2 a\, e^{jwt}$

Soit : $\underline{x} = \dfrac{w^2}{w_0^2 - w^2 + 2\lambda jw}\, a\, e^{jwt} = \underline{X}\, e^{jwt}$

Avec : $\begin{cases} X_0 = |\underline{X}| = a\,\dfrac{w^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\lambda^2 w^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-2\lambda w}{w_0^2 - w^2} \qquad (\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{X})) \end{cases}$

Rem. : $\underline{H} = \dfrac{\underline{X}(w)}{a}$ est la fonction de transfert d'un <u>filtre passe-haut</u> du 2e ordre.

2.c) * La résonance est obtenue pour $Q = \dfrac{w_0}{2\lambda} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, comme pour un filtre passe-bas du 2e ordre.

A.N. : $Q \approx 1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui assure l'existence d'une résonance.

* Pour $w = 7\ s^{-1}$: $u \approx 1{,}5 \Rightarrow y = 1{,}5$

Alors : $a = \dfrac{X_0}{y} = 13\ cm$

2.d) $P = \beta \overset{o}{x}^2 \Rightarrow$ $\boxed{< P > = \dfrac{1}{2}\beta\,|jw\underline{x}|^2 = \dfrac{1}{2}\beta w^2 X_0^2}$

A.N. : Pour $w = 7\ s^{-1}$: $\underline{< P > = 4{,}7\ mW}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

II – Amélioration du dispositif

1) On suppose que le mouvement a lieu sans glissement

1.a) La condition de RSG s'écrit :

$$\underbrace{\vec{v}\,(I \in \text{roue}/(R))}_{\vec{v}\,(G) + \overset{o}{\theta}\,\vec{y} \wedge \overrightarrow{GI}} = \vec{v}\,(I \in \text{sol}/(R)) = \vec{0}$$

Ainsi : $\boxed{\overset{o}{x} = a\,\overset{o}{\theta}}$

1.b) $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \frac{1}{2}\, J\, \overset{o}{\theta}^2$ (Koenig)

Soit : $\boxed{E_C = \frac{3}{4}\, m\, \overset{o}{x}^2}$

1.c) Le RSG implique la conservation de l'énergie mécanique du système :

Or : $E_P = \frac{1}{2}\, kx^2 + \text{cste}$

Ainsi : $\frac{3}{4}\, m\, \overset{o}{x}^2 + \frac{1}{2}\, kx^2 = \text{cste}$

Soit : $\boxed{\overset{o}{x}^2 + w^2\, x^2 = \text{cste}}$

forme intégrale 1ère de l'équation d'un oscillateur harmonique, avec :

$$\boxed{w^2 = \frac{2\,k}{3\,m} = \frac{2}{3}\, w_0^2}$$

1.d) Le RSG nécessite : $|T| < f_M$ (lois de Coulomb)

Si on applique le théorème du centre de masse à la roue, on obtient :

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ T - kx = m\,\overset{oo}{x} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} N = mg \\ T\ kx - mw^2x = m(w_0^2 - w^2)\, x = \frac{1}{3}\, mw_0^2 x \end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

Donc il y aura RSG si : $\frac{1}{3} m w_0^2 x \left| x \right| < fmg \quad \forall t$

Ce qui implique : $\boxed{x_0 < \frac{3\,fg}{w_0^{\,2}} = x_1}$

2) Cas où $x_0 > x_1$ phase de glissement

2.a) Dans le cas du glissement :

$$\begin{cases} * \ \vec{T} \text{ colinéaire et de sens opposé à la vitesse de glissement } \vec{v}_g \\ * \ \left\| \vec{T} \right\| = f\,N \end{cases}$$

2.b) On a toujours : $\begin{cases} N = mg \\ T - kx = m\,\overset{oo}{x} \end{cases}$ avec $T = + f\,N$ ($1^{ère}$ phase de glissement)

Ainsi : $\boxed{\overset{oo}{x} + w_0^{\,2}\, x = fg}$

La solution est : $x(t) = \alpha \cos(w_0 t) + \beta \sin(w_0 t) + \frac{fg}{w_0^{\,2}}$

Avec : $\begin{cases} x(o) = x_0 \\ \overset{o}{x}(o) = 0 \end{cases}$

on obtient : $\boxed{x(t) = (x_0 - \frac{x_1}{3}) \cos(w_0 t) + \frac{x_1}{3}}$

2.c) Pendant cette phase de glissement vers la gauche, le TMC barycentrique s'écrit :

$$J\,\overset{oo}{\theta} = - a\,T = - afmg$$

Soit : $\overset{oo}{\theta} = - \frac{2\,fg}{a} \Rightarrow \boxed{\overset{o}{\theta} = - \frac{2\,fg}{a}\,t}$

2.d) La vitesse de glissement est : $v_g = \overset{o}{x} - a\,\overset{o}{\theta}$

On obtient : $\boxed{v_g(t) = - w_0 (x_0 - \frac{x_1}{3}) \sin(w_0 t) + \frac{3}{2} w_0^2 x_1\, t}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

2.e) Pour $t \to 0$: $\sin(w_0 t) \sim w_0 t$, d'où :

$$\boxed{v_g(t) \approx w_0^2 \, (x_1 - x_0)} \qquad (v_g < 0 \text{ car } x_0 > x_1)$$

2.f) Le glissement cesse dès que $v_g = 0$, soit à l'instant t_1 tel que :

$$\boxed{(x_0 - \frac{x_1}{3}) \sin(w_0 t_1) = \frac{2}{3} \, (w_0 t_1) \, x_1}$$

III – Accélération radiale d'un satellite

1.a) On sait que : $E_p = -\dfrac{K}{r_0}$ $\qquad$ (si $\vec{F} = -\dfrac{K}{r_0^2}\,\vec{u}_r$)

$$E_m = -\frac{K}{2\,r_0} \qquad \text{(état lié)}$$

Donc : $E_c = E_m - E_p = -E_m$

Ainsi : $\dfrac{1}{2}\, m_S v_0^2 = \dfrac{K}{2\,r_0} = G m_S M_T \Rightarrow$ $\boxed{v_0 + \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_0}} = \sqrt{\dfrac{g\,R^2}{r_0}}}$

1.b) Pour un MCU : $T_0 = \dfrac{2\,\Pi\, r_0}{v_0}$

Soit : $\boxed{T_0 = 2\,\Pi \sqrt{\dfrac{r_0^3}{g\,R^2}}}$

A.N. :

* $r_0 = \left(\dfrac{g\,R^2 T_0^2}{4\,\Pi^2}\right)^{1/3} = 26700 \text{ km}$
* $v_0 = \dfrac{2\,\Pi\, r_0}{T_0} = 3{,}88 \text{ kms}^{-1}$
* $w_0 = \dfrac{2\,\Pi}{T_0} = 1{,}45 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$

2.a) On applique la 2e loi de Newton au point M dans le référentiel (R_S) non galiléen, en projection sur $\vec{x}$:

$$m\,\overset{oo}{x} = -\frac{GmM_T}{(r_0 + x)^2} \; \underbrace{- m w_1^2 x}_{\text{rappel élastique}} \; + \; \underbrace{m w_0^2 (r_0 + x)}_{Fi_e \text{ centrifuge}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

Rem. : $\overrightarrow{Fi_c} \cdot \vec{x} = 0 \quad (\overrightarrow{Fi_c} = -2\,m\,w\,\vec{z} \wedge \overset{o}{x}\,\vec{x})$

Soit : $\boxed{\overset{oo}{x} = -\frac{g\,R^2}{(r_0 + x)^2} - w_1^2 x + w_0^2\,(r_0 + x)}$

2.b) Pour $x << r_0$: $\overset{oo}{x} \approx -\underbrace{\frac{g\,R^2}{r_0^2}}_{w_0^2}\,(1 - \frac{2\,x}{r_0}) + (w_0^2 - w_1^2)\,x + w_0^2\,r_0$

Soit : $\boxed{\overset{oo}{x} + (w_1^2 - 3\,w_0^2)\,x = 0}$

2.c) Numériquement : $\begin{cases} w_0 = 1{,}5\ 10^{-4} s^{-1} \\ w_1 = 3\ 10^{-2} s^{-1} \end{cases}$

Donc $w_0 << w_1$, et on a un oscillateur harmonique de pulsation voisine de w_1.

2.d) Une accélération radiale perturbatrice modifiera la position d'équilibre relatif de l'oscillateur (nouvelle équation du mouvement : $\overset{oo}{x} + (w_1^2 - 3\,w_0^2)\,x = a_r$).

THERMODYNAMIQUE

1) Etude de différentes transformations subies par un gaz parfait

1.1.a) * Equation d'état du GP :

$$P_A^0 V_A^0 = \frac{m_0}{M_{O_2}} RT_A \Rightarrow \boxed{m_0 = \frac{P_A^0 Sd_A^0}{r_0 T_A^0}}$$

A.N. : $\boxed{m_0 = 2{,}56\ g}$

* De même pour le compartiment 1 :

$$\boxed{m_1 = \frac{P_A^1 Sd_A^1}{r_1 T_A^1}}$$

A.N. : $\boxed{m_1 = 1{,}68\ g}$

b) * Le piston Π_0 est bloqué : O_2 subit une transformation <u>isochore</u> : $\underline{d_B^0 = d_A^0 = 0{,}2\ m}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

* Contact thermique avec le thermostat : $\boxed{T_B^0 = T_S = 600\ K}$

* Isobare d'un GP : $\frac{P}{T} = cste$, donc : $\boxed{P_B^0 = P_A^0 \frac{T_S}{T_A^0}}$

A.N. : $\boxed{P_B^0 = 2\ 10^5\ Pa}$

c) * Le piston Π_1 est libre de se déplacer : $P_1 = P_{atm}$, $\forall t$ et N_2 subit donc une transformation monobare : $\boxed{P_1^B = P_B^0 = 10^5\ Pa}$

* $\boxed{T_B^1 = T_S = 600\ K}$

* Monobare d'un GP : $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \boxed{d_B^1 = \frac{T_S}{T_A^1} d_A^1}$

d) * $W_{AB}^0 = 0$ (isobare)

* $W_{AB}^1 = -P_{atm}(V_B^1 - V_A^1) = -P_{atm}S(d_B^1 - d_A^1)$ (monobare)

A.N. : $\boxed{W_{AB}^1 = -150\ J}$

e) * Transformation monobare : $Q_{AB} = \Delta H_{AB}$

* GP : $\Delta H_{AB} = mC_P(T_B - T_A)$ avec $C_P = \frac{r}{\gamma - 1}$

Ainsi : $\boxed{Q_{AB}^1 = m_1 \frac{r}{\gamma - 1}(T_B^1 - T_A^1)}$

A.N. : $\boxed{Q_{AB}^1 = 525\ J}$

f) 1ère identité thermodynamique :

$$dU = TdS - PdV \underline{GP}\ m\ c_v\ dT$$

D'où : $$dS = mc_v \frac{dT}{T} + mr \frac{dV}{V}$$

D'où l'expression générale de ΔS_{AB} pour un GP (en fonction des variables T et V) :

$$\Delta S_{AB} = mr\left[\frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\right]$$

Ici : $\boxed{\Delta S_{AB}^0 = \frac{m_0 r_0}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_B^0}{T_A^0}\right)}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

A.N. : $\boxed{\Delta S_{AB}{}^{0} = 1{,}16\ JK^{-1}}$

g) 2e identité thermodynamique : dH = TdS + VdP GP $mc_p dT$

On obtient de même l'expression générale de ΔS_{AB} pour un GP (en fonction des variables T et P) :

$$\Delta S_{AB} = mr\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)\right]$$

Ici : $\boxed{\Delta S_{AB}{}^{1} = m_1 r_1 \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_B{}^{1}}{T_A{}^{1}}\right)}$

A.N. : $\boxed{\Delta S_{AB}{}^{1} = 1{,}21\ J\ K^{-1}}$

h) * Pour le système $\{O_2 + N_2\}$: $\boxed{S_e = \frac{Q_{AB}{}^{0} + Q_{AB}{}^{1}}{T_S}}$

* 2e principe : $\Delta S_{AB}{}^{0+1} = S_e + \underbrace{S_{AB}{}^{P}}_{\geq 0}$

A.N. : $\underline{S_{AB}{}^{P} = 0{,}66\ JK^{-1} > 0}$ (irréversibilité)

1.2.a) * On a toujours : $\boxed{T_C{}^{0} = T_O{}^{1} = T_S}$

* Piston Π_0 débloqué : $\boxed{P_C{}^{0} = P_C{}^{1}}$

b) * Ainsi : $\frac{m_0 r_0 T_C{}^{0}}{Sd_C{}^{0}} = \frac{m_1 r_1 T_C{}^{1}}{Sd_C{}^{1}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{d_C{}^{1} = \frac{m_1 r_1}{m_0 r_0} d_C{}^{0}}$

* Par ailleurs : $d_C{}^{0} + d_C{}^{1} = d_B{}^{0} + d_B{}^{1}$ (piston Π_1 bloqué)

* On en déduit : $\boxed{d_C{}^{0} = \frac{d_B{}^{0} + d_B{}^{1}}{1 + \frac{m_1 r_1}{m_0 r_0}}}$

A.N. : $\boxed{d_C{}^{0} = 0{,}29\ m}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.