

Problème I : Eau et micro-ondes
I.1) Traitement classique de la rotation d'une molécule d'eau

$$\text{I.1.1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OH_1} \mid \begin{array}{l} a \sin \frac{\beta}{2} = 75,8 \text{ pm} \\ a \cos \frac{\beta}{2} = 58,6 \text{ pm} \end{array} \\ \overrightarrow{OH_2} \mid \begin{array}{l} -a \sin \frac{\beta}{2} \\ a \cos \frac{\beta}{2} \end{array} \end{array} \right.$$

$$\text{I.1.2)} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{m_H(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2})}{2 m_H + m_O} = \frac{m_H}{2 m_H + m_O} 2 a \cos \frac{\beta}{2} \vec{y}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{y_G = 6,5 \text{ pm}}$$

$$\text{I.1.3)} \quad * \quad \overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OG} : \begin{cases} \vec{x}_0 = 0 \\ \vec{y}_0 = -y_G \end{cases}$$

$$* \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GH_1} = \overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OG} \mid \begin{array}{l} \vec{x}_{H_1} = 75,8 \text{ pm} \\ \vec{y}_{H_1} = 52,1 \text{ pm} \end{array} \\ \overrightarrow{GH_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OG} \mid \begin{array}{l} \vec{x}_{H_2} = -75,8 \text{ pm} \\ \vec{y}_{H_2} = 52,1 \text{ pm} \end{array} \end{array} \right.$$

I.1.4) * J s'exprime en kgm²

$$* J_{Gx} = m_O \vec{y}_0^2 + m_H (\vec{y}_{H_1}^2 + \vec{y}_{H_2}^2)$$

$$\boxed{J_{Gx} = \frac{2 m_O m_H}{m_O + 2 m_H} a^2 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) = 10^{-47} \text{ kgm}^2}$$

$$* J_{Gy} = m_H (\vec{x}_{H_1}^2 + \vec{x}_{H_2}^2)$$

$$\boxed{J_{Gy} = 2 m_H a^2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) = 1,9 \times 10^{-47} \text{ kgm}^2}$$

Énoncé en fin de document.

* Comme la molécule est dans le plan 0xy (z = 0) :

$$J_{Gz} = J_{Gx} + J_{Gy} = 2,9 \times 10^{-47} \text{kgm}^2$$

I.1.5) Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

$$E_{Cx} = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2$$

I.1.6) De même : $\sigma_x = J_x \omega_x \Rightarrow E_{Cx} = \frac{\sigma_x^2}{2 J_x}$

I.1.7) $\langle E_{Cx} \rangle = \frac{1}{2} J_x \omega_q^2 = \frac{1}{2} k_B T \Rightarrow \omega_q = \sqrt{\frac{k_B T}{J_x}} = 2,2 \times 10^{13} \text{s}^{-1}$

$$\begin{cases} f_q = \frac{\omega_q}{2\pi} = 3,6 \times 10^{12} \text{Hz} \\ \tau_q = 0,28 \text{ps} \end{cases}$$

I.2) Les rayonnements micro-ondes

I.2.1) * $E = hf = 1,62 \times 10^{-24} \text{J}$

* $\lambda = \frac{c}{f} = 12,2 \text{ cm}$

* On ne peut négliger le phénomène de propagation que pour $L \ll \lambda$, ce qui n'est pas le cas pour $L = 10 \text{ cm}$.

I.2.2) Dans l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu conducteur de conductivité γ s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

Donc :

$$\begin{cases} [\mu_0 \gamma] = \left[\frac{B}{\delta E} \right] \\ [E] = [BC] = [B\delta f] \end{cases} \Rightarrow [\mu_0 \gamma] = \frac{1}{[\delta^2 f]}$$

Et finalement :

$$\delta^2 \sim \frac{1}{\mu_0 \gamma f}$$

A.N. : $\delta = 2,33 \mu\text{m}$

I.2.3) * $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 C} = E^2 \vec{u}$

Enoncé en fin de document.

$$* \langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 C} \vec{e} \quad (\text{l'onde se propage selon } \vec{u} = -\vec{e}_z)$$

$$\text{I.2.4) } \mathcal{P} = S \langle \Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 C} S \Rightarrow E_0^2 = \frac{2\mu_0 C}{S} \mathcal{P} = \frac{2}{\varepsilon_0 C} \frac{\mathcal{P}}{S}$$

$$\text{A.N. : } E_0 = 2,7 \times 10^3 \text{Vm}^{-1}$$

$$\text{I.2.5) } E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_0 \approx -10^{-26} \text{J}$$

$$\text{Donc : } |E_p| \ll \langle E_{Cx} \rangle \approx 10^{-21} \text{J}$$

Le chauffage par micro-ondes est donc inefficace en phase vapeur.

I.3) Absorption du rayonnement électromagnétique

$$\text{I.3.1) } \begin{cases} \underline{k} \text{ est complexe : } \underline{\text{absorption}} \\ k' = \text{Re}(\underline{k}) \text{ dépend de } \omega : \underline{\text{dispersion}} \end{cases}$$

$$\text{I.3.2) } \underline{\varepsilon}_r(\omega) = \alpha + \frac{\beta}{1 + j\omega\tau} = \varepsilon' - j\varepsilon'' \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon'(\omega) = \alpha + \frac{\beta}{1 + \omega^2\tau^2} \\ \varepsilon''(\omega) = \frac{\beta\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \begin{cases} \varepsilon' = 66,8 \\ \varepsilon'' = 4 \end{cases} \quad \text{à la fréquence de 2,45 GHz}$$

$$\text{I.3.3) } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{C^2} (\varepsilon' - j\varepsilon'')$$

En supposant a priori $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ (cf. A.N. précédente) :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{C^2} \varepsilon' \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) \Rightarrow \underline{k} \approx \frac{\omega}{C} \sqrt{\varepsilon'} \left(1 - \frac{1}{2} j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)$$

D'où :

$$\begin{cases} k' \approx \frac{\omega}{C} \sqrt{\varepsilon'} \\ k'' \approx \frac{\omega}{C} \frac{\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}} \end{cases}$$

I.3.4) Dans le milieu absorbant :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k''z} e^{(j\omega t + k'z)}$$

Enoncé en fin de document.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \wedge \vec{B}) = \frac{|\vec{E}|^2}{2\mu_0 C} \vec{u}$$

Soit :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle(z) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 C} e^{2k''z} (-\vec{e}_z)$$

Alors :

$$\frac{\langle \Pi(z=-L) \rangle}{\langle \Pi(z=0) \rangle} = e^{2k''L} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = \frac{\ln 2}{2k''}$$

A.N. : $L = 2,8 \text{ cm}$

Problème II : Mouvement de sphères dans les fluides

II.1) Fluide parfait dans un champ de pesanteur

II.1.1) Equation d'Euler :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} \right] = -\operatorname{grad} P_t + \rho \vec{g}$$

II.1.2) En hydrostatique : $\operatorname{grad} P_h = \rho \vec{g} \Rightarrow \frac{dP_z}{dz} - \rho(z)g = -\rho g$ si $\rho = \text{cste}$

Ainsi :

$$P_h + \rho g z = \text{cste} \quad (\text{Loi de Pascal})$$

II.2) Ecoulement stationnaire d'un fluide parfait autour d'une sphère immobile

II.2.1) Ecoulement incompressible (+ ni création ni absorption de fluide) :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

II.2.2) Pour un écoulement irrotationnel :

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \phi \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

II.2.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_u(z) = uz \\ \operatorname{grad} \phi_u = \frac{d\phi_u}{dz} \vec{e}_z = u \vec{e}_z = \vec{v}_u \end{array} \right.$$

Enoncé en fin de document.

II.2.4)
$$\begin{cases} \phi_u(r,\theta) = ur\cos\theta \\ \vec{v}_u = u(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) \end{cases}$$

II.2.5)
$$\begin{array}{l|l} \vec{v}_s = \text{grad}\phi & \frac{\partial\phi_s}{\partial r} = \left(u - \frac{2b}{r^3}\right)\cos\theta \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial\phi_s}{\partial\theta} = -\left(u + \frac{b}{r^3}\right)\sin\theta \\ (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi) & 0 \end{array}$$

II.2.6) Il suffit de vérifier : $\Delta\phi_s = 0$

Or :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_s(r,\theta) &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 + \frac{\partial\phi_s}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\phi_s}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial\phi_s}{\partial\theta} \right] \\ &= \frac{\cos\theta}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \left(u - \frac{2b}{r^3} \right) \right) - 2 \left(ur + \frac{b}{r^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

II.2.7) $\vec{v}_s \cdot \vec{u}_r = 0$ pour $u = \frac{2b}{a^3}$

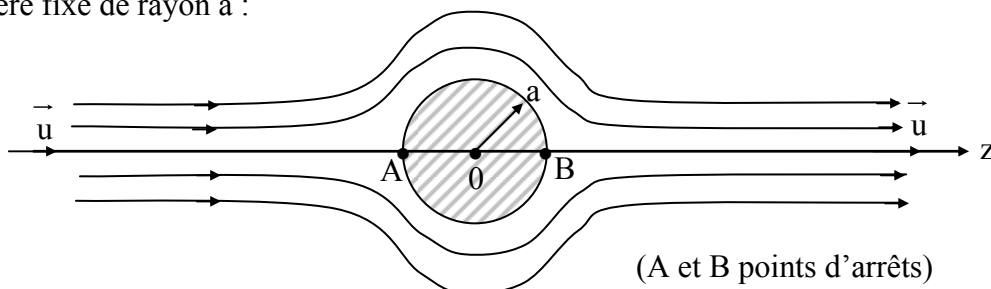
Alors :

$$\begin{array}{l|l} \vec{v}_s & u\cos\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ & -u\sin\theta \left(1 + \frac{a^3}{r^3} \right) \\ (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi) & 0 \end{array}$$

II.2.8)

	θ	v_r	v_θ		v_r	v_θ
$r = a$	0	0	0	$r = 2a$	7/8	0
	$\pi/4$	0	$-3\sqrt{2}/4$		$7\sqrt{2}/16$	$-17\sqrt{2}/32$
	$\pi/2$	0	-3/2		0	-17/16
	$3\pi/4$	0	$-3\sqrt{2}/4$		$-7\sqrt{2}/16$	$-17\sqrt{2}/32$
	π	0	0		-7/8	0

II.2.9) Allure des lignes de courants pour l'écoulement potentiel d'un fluide parfait autour d'une sphère fixe de rayon a :



Enoncé en fin de document.

II.2.10) Ecoulement stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

L'équation d'Euler, pour un écoulement de plus irrotationnel s'écrit, en négligeant la pesanteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P$$

Soit, avec $\rho = \text{cste}$: $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \vec{0}$:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C : \text{relation de Bernoulli}$$

A l' ∞ , on calcule

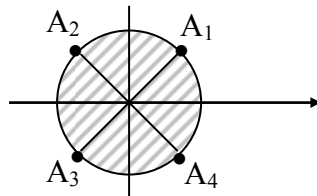
$$C = \frac{u^2}{2}$$

II.2.11) On détermine la pression à la surface de la sphère :

$$P(a, \theta) = \frac{\rho}{2} (u^2 - v^2(a, \theta))$$

Soit :

$$P(a, \theta) = \frac{\rho u^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right)$$



P a même valeur aux 4 points A_i , donc la force de traînée est nulle (fluide parfait, paradoxe de d'Alembert).

II.3) Sphère en mouvement de translation dans un fluide visqueux : approche qualitative

II.3.1) RFD à la bille :

$$\left(\rho_b \frac{4}{3} \Pi a^3 \right) \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\rho_b \frac{4}{3} \Pi a^3 \right) \vec{g} - \underbrace{\left(\rho \frac{4}{3} \Pi a^3 \right) \vec{g}}_{\vec{\Pi}_A} - 6 \Pi \eta a \vec{u}$$

Soit :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{\tau} = \frac{\vec{u}_\infty}{\tau}$$

Enoncé en fin de document.

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{2}{9} \frac{\rho_b a^2}{\eta} \\ \vec{u}_\infty = \tau \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b} \right) \vec{g} \end{array} \right.$$

II.3.2) A.N. : * Brouillard : $u_\infty = 0,12 \text{ mms}^{-1}$ (réaliste...)

* Pluie : $u_\infty = 120 \text{ ms}^{-1}$ (pas du tout réaliste, cf. II.3.3)

$$\text{II.3.3) } * R_e = \frac{\rho \|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\|}{\eta \| \vec{\Delta} \vec{v} \|} \sim \frac{\rho L v}{\eta}$$

Ici :

$$R_e \sim \frac{\rho a u_\infty}{\eta}$$

Validité de la loi de Stokes : $R_e < 1$

$$* \left\{ \begin{array}{l} \text{Brouillard : } R_e \approx 10^{-5} \\ \text{Pluie : } R_e \approx 10^4 \end{array} \right.$$

Pour les gouttelettes de pluie, il faut prendre une force de traînée type Venturi :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \rho S C_u \vec{u} \quad (C \text{ coefficient de traînée}).$$

II.4) Interactions hydrodynamiques dans un fluide visqueux

II.4.1)

θ	v_r	v_θ
0	-2	0
$\Pi/4$	$-\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\Pi/2$	0	1
$3 \Pi/4$	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
Π	2	0

II.4.2) Dans le référentiel du laboratoire, les huit billes voient un écoulement de vitesse \vec{v} , et sont donc soumises à une force d'origine visqueuse :

$$\vec{F} = 6 \Pi \eta a \vec{v}$$

On peut représenter ces forces :