CCP PC I – 2008

Enoncé en fin de document.

CCP PC I 2008

Problème I : Eau et micro-ondes

I.1) Traitement classique de la rotation d'une molécule d'eau

I.1.1)

$$\left|\begin{array}{ll} \overrightarrow{OH_1} & \left|\begin{array}{l} a\sin\dfrac{\beta}{2} = 75{,}8 \text{ pm} \\ a\cos\dfrac{\beta}{2} = 58{,}6 \text{ pm} \end{array}\right. \\ \overrightarrow{OH_2} & \left|\begin{array}{l} -a\sin\dfrac{\beta}{2} \\ a\cos\dfrac{\beta}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

I.1.2)

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_H(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2})}{2m_H + m_0} = \frac{m_H}{2m_H + m_0}\, 2a\cos\frac{\beta}{2}\,\vec{y}}$$

A.N. :

$$\boxed{y_G = 6{,}5 \text{ pm}}$$

I.1.3) * $\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OG}$: $\left\{\begin{array}{l} \vec{x}_0 = 0 \\ \vec{y}_0 = -y_G \end{array}\right.$

* $\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{GH_1} = \overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OG} & \left|\begin{array}{l} \vec{x}_{H_1} = 75{,}8 \text{ pm} \\ \vec{y}_{H_1} = 52{,}1 \text{ pm} \end{array}\right. \\ \overrightarrow{GH_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OG} & \left|\begin{array}{l} \vec{x}_{H_2} = -75{,}8 \text{ pm} \\ \vec{y}_{H_2} = 52{,}1 \text{ pm} \end{array}\right. \end{array}\right.$

I.1.4) * J s'exprime en kgm^2

* $J_{Gx} = m_0 \vec{y}_0^{\,2} + m_H(\vec{y}_{H_1}^{\,2} + \vec{y}_{H_2}^{\,2})$

$$\boxed{J_{Gx} = \frac{2m_0m_H}{m_0 + 2m_H}a^2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 10^{-47}\text{kgm}^2}$$

* $J_{Gy} = m_H(\vec{x}_{H_1}^{\,2} + \vec{x}_{H_2}^{\,2})$

$$\boxed{J_{Gy} = 2m_Ha^2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1{,}9 \text{ x } 10^{-47}\text{kgm}^2}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

* Comme la molécule est dans le plan 0xy (z = 0) :

$$\boxed{J_{Gz} = J_{Gx} + J_{Gy} = 2{,}9 \times 10^{-47}\,kgm^2}$$

I.1.5) Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

$$\boxed{E_{Cx} = \frac{1}{2} J_x w_x^2}$$

I.1.6) De même : $\boxed{\sigma_x = J_x w_x} \Rightarrow E_{Cx} = \dfrac{\sigma_x^2}{2 J_x}$

I.1.7) $< E_{Cx} > = \dfrac{1}{2} J_x w_q^2 = \dfrac{1}{2} k_B T \Rightarrow \boxed{w_q = \sqrt{\dfrac{k_B T}{J_x}} = 2{,}2 \times 10^{13}\,s^{-1}}$

$$\boxed{\begin{cases} f_q = \dfrac{w_q}{2\Pi} = 3{,}6 \times 10^{12}\,Hz \\ \tau_q = 0{,}28\ ps \end{cases}}$$

I.2) Les rayonnements micro-ondes

I.2.1) * $E = hf = 1{,}62 \times 10^{-24} J$

* $\lambda = \dfrac{C}{f} = 12{,}2\ cm$

* On ne peut négliger le phénomène de propagation que pour $L << \lambda$, ce qui n'est pas le cas pour L = 10 cm.

I.2.2) Dans l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu conducteur de conductivité γ s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

Donc : $\begin{cases} [\mu_0\gamma] = \left[\dfrac{B}{\delta E}\right] \\ [E] = [BC] = [B\delta f] \end{cases} \Rightarrow [\mu_0\gamma] = \dfrac{1}{[\delta^2 f]}$

Et finalement : $\boxed{\delta^2 \sim \dfrac{1}{\mu_0 \gamma f}}$

A.N. : $\boxed{\delta = 2{,}33\ \mu m}$

I.2.3) * $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{1}{\mu_0 C} = E^2 \vec{u}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$* \langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{E_0^{\,2}}{2\mu_0 C}\,\vec{e} \quad \text{(l'onde se propage selon } \vec{u} = -\vec{e}_z\text{)}$$

I.2.4) $\mathcal{P} = S \langle \Pi \rangle = \dfrac{E_0^{\,2}}{2\mu_0 C} S \Rightarrow E_0^{\,2} = \dfrac{2\mu_0 C}{S}\mathcal{P} = \dfrac{2}{\varepsilon_0 C}\dfrac{\mathcal{P}}{S}$

A.N. : $\boxed{E_0 = 2{,}7 \text{ x } 10^3 \text{Vm}^{-1}}$

I.2.5) $\boxed{E_P = -\vec{P}.\vec{E}_0 \approx -10^{-26}\text{J}}$

Donc : $\boxed{|E_P| << \langle E_{Cx} \rangle \approx 10^{-21}\text{J}}$

Le chauffage par micro-ondes est donc inefficace en phase vapeur.

I.3) Absorption du rayonnement électromagnétique

I.3.1) $\begin{cases} \underline{k} \text{ est complexe : } \underline{\text{absorption}} \\ k' = \text{Re}(\underline{k}) \text{ dépend de w : } \underline{\text{dispersion}} \end{cases}$

I.3.2) $\underline{\varepsilon_r}(w) = \alpha + \dfrac{\beta}{1 + jw\tau} = \varepsilon' - j\varepsilon'' \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon'(w) = \alpha + \dfrac{\beta}{1 + w^2\tau^2} \\ \varepsilon''(w) = \dfrac{\beta w\tau}{1 + w^2\tau^2} \end{cases}$

A.N. : $\boxed{\begin{cases} \varepsilon' = 66{,}8 \\ \varepsilon'' = 4 \end{cases}}$ à la fréquence de 2,45 GHz

I.3.3) $\underline{k}^2 = \dfrac{w^2}{C^2}(\varepsilon' - j\varepsilon'')$

En supposant a priori $\varepsilon'' << \varepsilon'$ (cf. A.N. précédente) :

$$\underline{k}^2 = \frac{w^2}{C^2}\,\varepsilon'\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \Rightarrow \underline{k} \approx \frac{w}{C}\sqrt{\varepsilon'}\left(1 - \frac{1}{2}\,j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)$$

D'où : $\boxed{\begin{cases} k' \approx \dfrac{w}{C}\sqrt{\varepsilon'} \\ k'' \approx \dfrac{w}{C}\dfrac{\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}} \end{cases}}$

I.3.4) Dans le milieu absorbant :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0\, e^{k''z} e^{(wt + k'z)}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$<\vec{\Pi}> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}^{*} \wedge \underline{\vec{B}}) = \frac{\left|\underline{\vec{E}}\right|^2}{2\mu_0 C}\,\vec{u}$$

Soit : $$\boxed{<\vec{\Pi}>(z) = \frac{E_0^{\,2}}{2\mu_0 C}\, e^{2k''z}(-\vec{e}_z)}$$

Alors : $$\frac{<\Pi(z=-L)>}{<\Pi(z=0)>} = e^{2k''L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\ln 2}{2k''}}$$

A.N. : $\boxed{L = 2{,}8 \text{ cm}}$

Problème II : Mouvement de sphères dans les fluides

II.1) Fluide parfait dans un champ de pesanteur

II.1.1) Equation d'Euler : $$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P_t + \rho\,\vec{g}}$$

II.1.2) En hydrostatique : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P_h = \rho\,\vec{g} \Rightarrow \frac{dP_z}{dz} - \rho(z)g = -\rho g$ si $\rho = \text{cste}$

Ainsi : $\boxed{P_h + \rho g z = \text{cste}}$ (Loi de Pascal)

II.2) Ecoulement stationnaire d'un fluide parfait autour d'une sphère immobile

II.2.1) Ecoulement incompressible (+ ni création ni absorption de fluide) :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v} = 0}$$

II.2.2) Pour un écoulement irrotationnel :

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}}$$

II.2.3) $$\boxed{\begin{cases} \phi_u(z) = uz \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_u = \frac{d\phi_u}{dz}\,\vec{e}_z = u\,\vec{e}_z = \vec{v}_u \end{cases}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

II.2.4) $\begin{cases} \phi_u(r,\theta) = ur\cos\theta \\ \vec{v}_u = u(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) \end{cases}$

II.2.5)

$\vec{v}_s = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$	$\dfrac{\partial\phi_s}{\partial r} = \left(u - \dfrac{2b}{r^3}\right)\cos\theta$
	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi_s}{\partial\theta} = -\left(u + \dfrac{b}{r^3}\right)\sin\theta$
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	0

II.2.6) Il suffit de vérifier : $\Delta\phi_s = 0$

Or :
$$\Delta\phi_s(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 + \frac{\partial\phi_s}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\phi_s}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\phi_s}{\partial\theta}\right]$$
$$= \frac{\cos\theta}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\left(u - \frac{2b}{r^3}\right)\right) - 2\left(ur + \frac{b}{r^2}\right)\right] = 0$$

II.2.7) $\vec{v}_s \cdot \vec{u}_r = 0$ pour $u = \dfrac{2b}{a^3}$

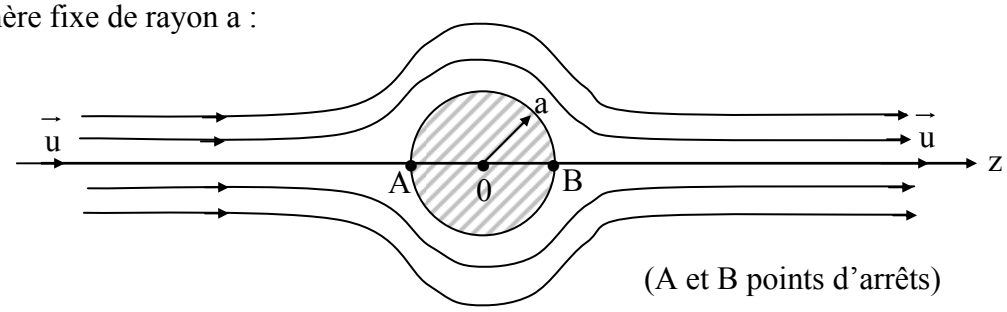
Alors :

$\vec{v}_s$	$u\cos\theta\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right)$
	$-u\sin\theta\left(1 + \dfrac{a^3}{r^3}\right)$
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	0

II.2.8)

	θ	v_r	v_θ		v_r	v_θ
	0	0	0		7/8	0
	Π/4	0	$-3\sqrt{2}/4$		$7\sqrt{2}/16$	$-17\sqrt{2}/32$
r = a	Π/2	0	−3/2	r = 2a	0	−17/16
	3 Π/4	0	$-3\sqrt{2}/4$		$-7\sqrt{2}/16$	$-17\sqrt{2}/32$
	Π	0	0		−7/8	0

II.2.9) Allure des lignes de courants pour l'écoulement potentiel d'un fluide parfait autour d'une sphère fixe de rayon a :



(A et B points d'arrêts)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

II.2.10) Ecoulement stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

L'équation d'Euler, pour un écoulement de plus irrotationnel s'écrit, en négligeant la pesanteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

Soit, avec ρ = cste : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right) = \vec{0}$:

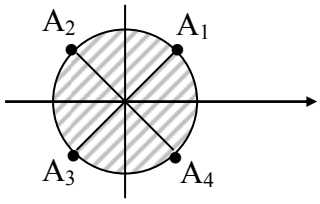
$$\boxed{\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2} = C \text{ : relation de Bernoulli}}$$

A l'∞, on calcule $\boxed{C = \frac{u^2}{2}}$

II.2.11) On détermine la pression à la surface de la sphère :

$$P(a,\theta) = \frac{\rho}{2}(u^2 - v^2(a,\theta))$$

Soit : $\boxed{P(a,\theta) = \frac{\rho u^2}{2}\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)}$



P a même valeur aux 4 points A_i, donc la <u>force de traînée est nulle</u> (fluide parfait, <u>paradoxe de d'Alembert</u>).

II.3) Sphère en mouvement de translation dans un fluide visqueux : approche qualitative

II.3.1) RFD à la bille :

$$\left(\rho_b \frac{4}{3}\Pi a^3\right)\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\rho_b \frac{4}{3}\Pi a^3\right)\vec{g} - \underbrace{\left(\rho \frac{4}{3}\Pi a^3\right)\vec{g}}_{\vec{\Pi}_A} - 6\,\Pi\eta a\,\vec{u}$$

Soit : $\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{\vec{u}}{\tau} = \frac{\vec{u}_\infty}{\tau}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Avec : $\begin{cases} \tau = \dfrac{2}{9}\dfrac{\rho_b a^2}{\eta} \\ \vec{u}_\infty = \tau\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_b}\right)\vec{g} \end{cases}$

II.3.2) ***A.N.*** : * Brouillard : $u_\infty = 0{,}12\ \text{mms}^{-1}$ (réaliste…)

* Pluie : $u_\infty = 120\ \text{ms}^{-1}$ (pas du tout réaliste, cf. II.3.3)

II.3.3) * $R_e = \dfrac{\rho\left\|(\vec{v}.\text{grad})\vec{v}\right\|}{\eta\left\|\vec{\Delta}\vec{v}\right\|} \sim \dfrac{\rho L v}{\eta}$

Ici : $R_e \sim \dfrac{\rho a u_\infty}{\eta}$ Validité de la loi de Stokes : $R_e < 1$

* $\begin{cases} \text{Brouillard} : R_e \approx 10^{-5} \\ \text{Pluie} : R_e \approx 10^{4} \end{cases}$

Pour les gouttelettes de pluie, il faut prendre une force de traînée type Venturi :
$\vec{F} = -\dfrac{1}{2}\rho S C u \vec{u}$ (C coefficient de traînée).

II.4) Interactions hydrodynamiques dans un fluide visqueux

II.4.1)

θ	v_r	v_θ
0	-2	0
$\Pi/4$	$-\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\Pi/2$	0	1
$3\,\Pi/4$	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
Π	2	0

II.4.2) Dans le référentiel du laboratoire, les huit billes voient un écoulement de vitesse $\vec{v}$, et sont donc soumises à une force d'origine visqueuse :

$\vec{F} = 6\,\Pi\eta a\,\vec{v}$

On peut représenter ces forces :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.