

Problème 1 : mouvements de charges électriques en milieux neutres

1) Cas d'un milieu conducteur (électrons libres)

1.1) $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ colinéaire de sens opposé à \vec{E} .

1.2) * RFD à un électron (dans un référentiel supposé galiléen...) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

* $\left[\frac{v}{\tau} \right] = \left[\frac{dv}{dt} \right]$, de sorte que τ est bien sûr un temps.

$$* \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E} = \frac{\vec{v}_\infty}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \\ \vec{v}_\infty = -\tau \frac{e\vec{E}}{m} \end{cases} \quad (\vec{v}(0) = \vec{0})$$

Rem. : On suppose ici $\vec{E} = \overrightarrow{cste}$ (uniforme et permanent).

* τ est donc le temps de relaxation (temps de mise en régime permanent).

1.3) * $\vec{j} = -n^*e \vec{v}_\infty$

* Avec $\vec{v}_\infty = -\tau \frac{e\vec{E}}{m}$, on tire : $\vec{j} = \frac{n^*e^2\tau}{m} \vec{E} = \gamma \vec{E}$ avec : $\gamma = \frac{n^*e^2\tau}{m}$

1.4) * $n^* = \mathcal{N}_A \frac{\mu}{m} = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$

* $\tau = \frac{m\gamma}{n^*e^2} = 2,4 \times 10^{-14} \text{ s}$

* $\begin{cases} f = \frac{1}{\tau} \approx 4 \times 10^{13} \text{ Hz} \\ \lambda = c\tau \approx 7 \text{ } \mu\text{m (infrarouge)} \end{cases}$

2) Cas d'un milieu diélectrique (électrons élastiquement liés)

2.1) * $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - m\Omega^2 \vec{r}$

Enoncé en fin de document.

Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \text{ si } v \ll v_\phi \\ \bullet \|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\| \text{ si } v \ll v_\phi \\ \bullet \vec{E}(\vec{r}, t) \approx \vec{E}(t) \text{ uniforme au niveau de l'atome si } a \ll \lambda \text{ (a dimension de l'atome)} \end{array} \right.$$

Au final, si $v \ll v_\phi \Leftrightarrow a \ll \lambda$:

$$\boxed{m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\vec{E} - m\Omega^2 \vec{r}} \quad \text{avec } \vec{E}(t) \text{ uniforme.}$$

* En dérivant par rapport au temps l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} m \underbrace{\frac{d^2 \vec{v}}{dt^2}} &\approx -e \underbrace{\frac{d\vec{E}}{dt}} - m\Omega^2 \vec{v} \\ &\approx \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} \approx \frac{d\vec{E}}{\partial t} \quad (\text{si } v \ll v_\phi) \end{aligned}$$

* En RSF, on obtient :

$$-m\omega^2 \vec{v} \approx -e i\omega \vec{E} - m\Omega^2 \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{v} \approx -\frac{e}{m} \frac{i\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \vec{E}}$$

* Puis :

$$\boxed{\vec{j} = -n^{**} e \vec{v} = \frac{n^{**} e^2}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \underbrace{(i\omega \vec{E})}_{\frac{d\vec{E}}{\partial t}}}$$

2.2) a) Dans le vide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \text{ (MG)} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \text{ (M}\phi\text{)} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (MF)} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (MA)} \end{array} \right.$$

b) On calcule $\text{rot}(\text{rot } \vec{E})$, et on obtient :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{E} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \end{array} \right.}$$

c) Avec $\vec{j} \neq \vec{0}$, MA s'écrit : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Enoncé en fin de document.

d) $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r :$

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \\ n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r} \end{cases}$$

2.3) a) En identifiant les deux expressions de $\vec{\text{rot}} \vec{B}$, on obtient :

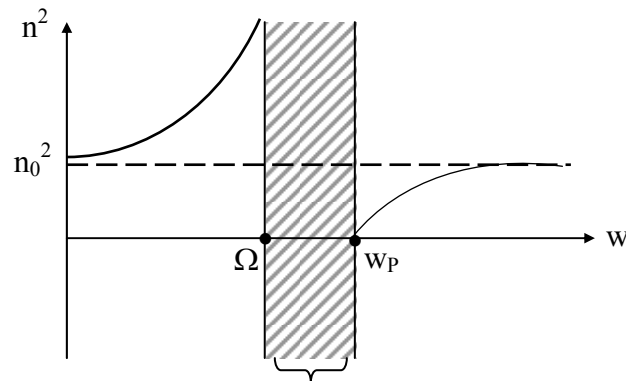
$$\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec $\vec{j} = \frac{n^{**} e^2}{m(\Omega^2 - w^2)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on tire : $\frac{n^{**} e^2}{m(\Omega^2 - w^2)} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$

En posant $w_p^2 = \frac{n^{**} e^2}{m \epsilon_0}$, on a alors :

$$\epsilon_r = \underline{n}^2 = 1 + \frac{w_p^2}{\Omega^2 - w^2}$$

Rem. : $\underline{n}^2 = \frac{w^2 - (\Omega^2 + w_p^2)}{w^2 - \Omega^2} = \frac{w^2 - w_p'^2}{w^2 - \Omega^2}$



$\underline{n}^2 < 0 : \underline{n} = in''$ (milieu totalement réflecteur)

L'indice est réel (milieu transparent) pour $w \in]0, \Omega[\cup]w_p, +\infty[$.

b) Pour $w \ll \Omega = w_p : n^2 = 1 + \frac{w_p^2}{w_p^2 - w^2}$

Soit : $n^2 = 1 + \frac{1}{1 - \frac{w^2}{w_p^2}} \approx 1 + \left(1 + \frac{w^2}{w_p^2}\right) \Rightarrow n^2 \approx 2 \left(1 + \frac{w^2}{2 w_p^2}\right) \Rightarrow n \approx \sqrt{2} \left(1 + \frac{w^2}{4 w_p^2}\right)$

Avec $w = \frac{2 \pi c}{\lambda}$, on obtient finalement :

Enoncé en fin de document.

$$n(\lambda) \approx \sqrt{2} \left[1 + \frac{\Pi^2 C^2}{\lambda^2 w_p^2} \right]$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \left(\frac{\Pi C}{w_p} \right)^2 \end{cases}$$

(Formule de Cauchy, traduisant la dispersion de la lumière visible).

A.N. :

$$\begin{cases} w_p = 10^{16} \text{s}^{-1} \\ b = 1,2 \times 10^{-14} \text{m}^2 \end{cases}$$

Lors d'une réfraction d'un milieu d'indice n_1 sur un milieu d'indice n_2 , la loi de Snell-Descentes s'écrit :

$$n_1(\lambda) \sin i_1 = n_2(\lambda) \sin i_2(\lambda)$$

Pour i_1 fixé, on voit que l'angle de réfraction i_2 dépend de λ : le faisceau incident est « dispersé ».

2.4) * On a :

$$\begin{cases} n_0 \sin A = \sin r_0 \text{ pour } \lambda = \lambda_0 \\ n \sin A = \sin(r_0 + \theta) \text{ pour } \lambda \neq \lambda_0 \end{cases}$$

Or :

$$\sin(r_0 + \theta) = \sin r_0 \cos \theta + \cos r_0 \sin \theta \approx \sin r_0 + \theta \cos r_0 \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ ordre en } \theta$$

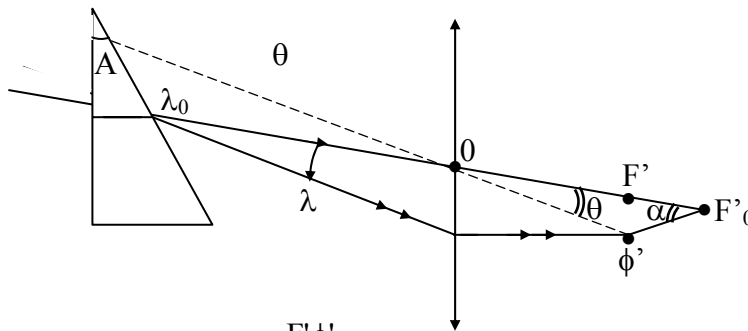
Ainsi :

$$\theta \approx \frac{(n - n_0) \sin A}{\cos r_0}$$

Avec $\cos r_0 = \sqrt{1 - \sin^2 r_0} = \sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 A}$

D'où finalement :

$$\theta \approx \frac{(n - n_0) \sin A}{\sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 A}}$$



On voit que :

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{F'\phi'}{OF'} \\ \tan \alpha = \frac{F'\phi'}{F'F'_0} \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \tan \theta \frac{OF'}{F'F'_0}$$

Or :

$$\begin{cases} OF' = b' = \frac{R}{n - 1} \\ OF'_0 = f'_0 = \frac{R}{n_0 - 1} \end{cases}$$

Enoncé en fin de document.

Ainsi :
$$\tan\alpha = \tan\theta \frac{f'}{f'_0 - f'} \Rightarrow \tan\alpha \approx \left(\frac{n_0 - 1}{n - n_0} \right) \theta$$

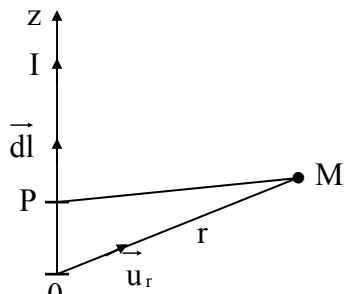
Puis, en remplaçant θ par l'expression obtenue précédemment, on obtient finalement :

$$\tan\alpha \approx \frac{(n_0 - 1)\sin A}{\sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 A}} \quad (\text{indépendant de } n)$$

A.N. : $\alpha \approx 0,5 \text{ rad} \approx 30^\circ$

L'image d'un objet polychromatique n'est donc pas nette : chaque point génère une ligne image $F'\phi'$ (aberration chromatique).

3) Examen préliminaire de la loi de Biot et Savart à la lumière des équations de Maxwell

3.1) 
$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

(P voisin de 0)

Pour une charge ponctuelle en mouvement de vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_z$: $I d\vec{l} \rightarrow q \vec{v}$ (en Am)

Et :
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{v} \wedge \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Rem. : L'expression ci-dessus n'est valable que pour une charge non relativiste et non accélérée ($\vec{v} = \text{cste}$).

3.2) En coordonnées sphériques

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin\theta}{r^2} \vec{u}_\phi = \sin\theta \psi(r) \vec{u}_\phi \quad \text{avec} \quad \psi(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2}$$

3.3) Avec
$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \\ \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r^2} \right) = \frac{6}{r^4} \end{cases}$$

on obtient :
$$\vec{\Delta} \vec{B} = \vec{0}$$

Enoncé en fin de document.

3.4) En formant $\vec{\Delta}(\vec{\text{rot}} \vec{B})$, on obtient trivialement l'équation de D'Alembert sur \vec{B} :

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Donc $\vec{\Delta} \vec{B} = \vec{0}$ ssi $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

Le problème est que dans l'expression obtenue au 3.2), le champ \vec{B} n'est pas stationnaire, puisque la charge se déplace (sauf si celle reste effectivement au voisinage de 0, ce qui est supposé ici, mais alors elle ne peut être en TRU et l'expression du 3.1) n'est plus valable). En conclusion, l'énoncé pose problème et est mal formulé.

Il y a de toute façon une incohérence fondamentale entre l'électromagnétisme et la mécanique classique.

4) Rayonnement d'un dipôle (doublet électrique) oscillant)

4.1) $\vec{\Delta} \vec{B} = \sin\theta \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \psi \right] \vec{u}_\phi = \frac{1}{C^2} \sin\theta (-w^2) \psi \vec{u}_\phi$

Avec $\psi(r,t) = \psi^*(r)e^{iwt}$, on obtient l'équation différentielle sur $\psi^*(r)$:

$$\frac{d^2 \psi^*}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi^*}{dr} + \left(\frac{w^2}{C^2} - \frac{2}{r^2} \right) \psi^* = 0$$

4.2) * $A_2 e^{iw\left(t+\frac{r}{C}\right)}$ correspond à une onde convergeant vers 0.

Donc $A_2 = 0$ si on ne considère que l'onde divergeant de 0.

* Alors : $\psi^*(r) = \frac{A_1}{r^2} \left[1 + \frac{iwr}{C} \right] e^{-\frac{iwr}{C}} \rightarrow \frac{A_1}{r^2}$ pour $w \rightarrow 0$

D'où : $A_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} qv$

Et : $\vec{B}(r,\theta,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} qv \left[1 + \frac{iwr}{C} \right] e^{iw\left(t-\frac{r}{C}\right)} \sin\theta \vec{u}_\phi$ avec $\frac{w}{C} = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $v \sin\theta \vec{u}_\phi = \vec{v} \wedge \vec{u}_r$

4.3) * Pour $r \gg \lambda$ (zone de rayonnement) : $\frac{wr}{C} \gg 1$, et :

$$\vec{B}(r,\theta,t) \approx \frac{i\mu_0}{4\pi r C} qv w e^{iw\left(t-\frac{r}{C}\right)} \sin\theta \vec{u}_\phi = \frac{i\mu_0}{2r\lambda} qv e^{iw\left(t-\frac{r}{C}\right)} \sin\theta \vec{u}_\phi$$

(champ en $\frac{1}{r}$...).

Enoncé en fin de document.

* On tire ensuite \vec{E} par : $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{i\omega}{C^2} \vec{E}$

Ainsi :

$$\vec{E} = \frac{C^2}{i\omega} \begin{array}{l} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\varphi) \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \\ (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) \quad | \quad 0 \end{array}$$

Soit :

$$\vec{E} = \frac{qV}{4\pi\epsilon_0 r C} e^{i\omega\left(t-\frac{r}{C}\right)} \begin{array}{l} \frac{2 \cos \theta}{r} \\ i \frac{\omega}{C} \sin \theta \\ (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) \quad | \quad 0 \end{array}$$

* Pour $r \gg \lambda$: $E_r \ll E_\theta$, et :

$$\vec{E}(r, \theta, t) \approx \frac{i\mu_0 qV}{4\pi r} \omega e^{i\omega\left(t-\frac{r}{C}\right)} \sin \theta \vec{u}_\theta$$

Rem. 1 : On vérifie l'homogénéité des expressions de \vec{E} et \vec{B} obtenues, sachant que

$$\begin{cases} [B] = \left[\frac{\mu_0 I}{r} \right] = \left[\frac{\mu_0 qV}{r^2} \right] \\ [E] = \left[\frac{q}{\epsilon_0 r^2} \right] \end{cases}$$

Rem. 2 : On vérifie également classiquement la structure locale d'onde plane pour l'onde rayonnée (dans la zone de rayonnement) :

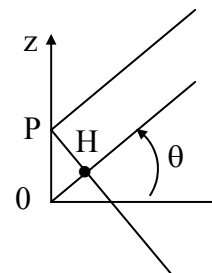
$$\vec{E} = \vec{B} \wedge C \vec{u}_r$$

4.4) D'après le théorème de Malus :

$$\delta = OH = z \cos \theta$$

D'où :

$$B_\varphi = g(r, \theta) e^{i\omega\left(t-\left(\frac{r-z\cos\theta}{C}\right)\right)}$$



5) Antenne filaire émettrice

$$dB_\varphi = g_0(r, \theta) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) e^{i\omega\left(t-\left(\frac{r-z\cos\theta}{C}\right)\right)} dz$$

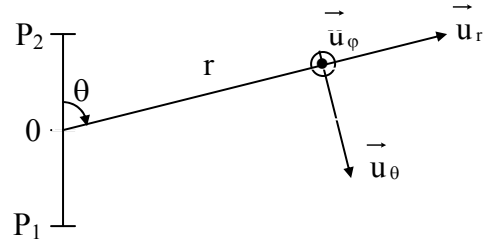
Enoncé en fin de document.

pour le tronçon de longueur dz, avec

$$g_0(r, \theta) = \frac{i\mu_0 q V}{2 r \lambda} \sin \theta$$

Alors :

$$B_\phi = g_0(r, \theta) \int_{z=-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos\left(\frac{2 \Pi z}{\lambda}\right) e^{i\omega\left[t - \left(\frac{r - z \cos \theta}{c}\right)\right]} dz$$



5.2.) a) On a encore pour l'antenne :

$$\vec{B} = \frac{1}{C} \vec{u}_r \wedge \vec{E}$$

b) * $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ puissance surfacique (Wm^{-2}) transportée par l'onde.

$$* \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0 C} |\vec{E}|^2 \vec{u}_r = \frac{C}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \vec{u}_r \text{ (en notation complexe)}$$

Soit :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle(r, \theta) = \frac{\mu_0 C q^2 V^2}{2 \Pi^2 \lambda^2} \cdot \frac{1}{r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\Pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \vec{u}_r$$

On remarque classiquement :

- La dépendance en $\frac{1}{r^2}$ de $\langle \Pi \rangle$ traduisant la conservation de l'énergie ($\text{div} \langle \vec{\Pi} \rangle = 0$).
- L'anisotropie du rayonnement, maximal dans le plan perpendiculaire à l'antenne (cf 5.3).

$$c) \begin{cases} d\phi = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot dS \vec{u}_r = \langle \Pi \rangle dS \\ \varepsilon(r, \theta) = \frac{d\phi}{dS} = \langle \Pi \rangle(r, \theta) \end{cases}$$

5.3)

$$\frac{\varepsilon\left(r, \theta = \frac{\Pi}{4}\right)}{\varepsilon\left(r, \theta = \frac{\Pi}{2}\right)} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\Pi}{2} \cos \frac{\Pi}{4}\right)}{\sin \frac{\Pi}{4}} \right]^2 \approx 0,4$$

Enoncé en fin de document.

6) Diffusion Rayleigh dans le visible

6.1) * Une onde est diffusée lorsqu'elle est déviée dans de nombreuses directions après interaction avec un milieu matériel.

* Diffusion Rayleigh :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \ll \lambda, \text{ a dimension de l'élément diffuseur} \\ w \ll w_0, \text{ pulsation de résonance du milieu diffuseur} \end{array} \right.$$

Cette diffusion, dans le visible, est prépondérante dans le bleu (« bleu du ciel »). Par contre, pour les gouttelettes des nuages, la condition $a \ll \lambda$ n'est pas respectée : il s'agit de diffusion de Mie, et les nuages paraissent blancs.

6.2) On est cette fois dans le cas où $z \approx a \ll \lambda \ll r$ (alors que $z \sim \lambda$ pour l'antenne).

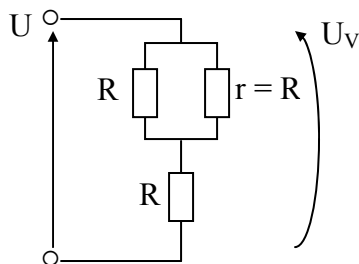
Problème II : « Contrariétés » expérimentales

1) Un voltmètre récalcitrant !

1.1) En l'absence de voltmètre :

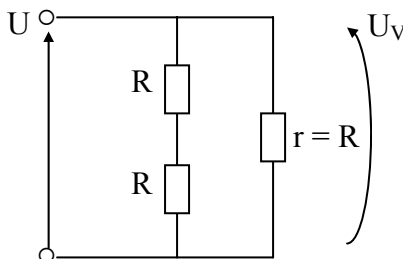
$$V_{MN} = V_{PM} = \frac{U}{2} = 120 \text{ V}$$

1.2) * Voltmètre entre MN ou PM :



$$U_v = \frac{R/2}{R + R/2} U = \frac{U}{3} = 80 \text{ V}$$

* Voltmètre entre PN



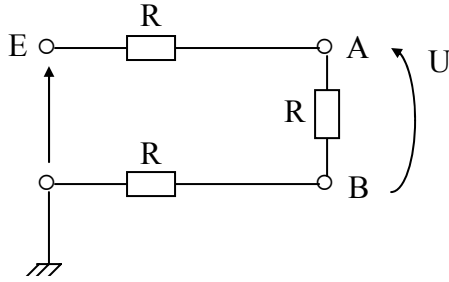
$$U_v = U = 240 \text{ V}$$

1.3) Le voltmètre perturbe la mesure. Une bonne mesure nécessite $r \gg R$.

Enoncé en fin de document.

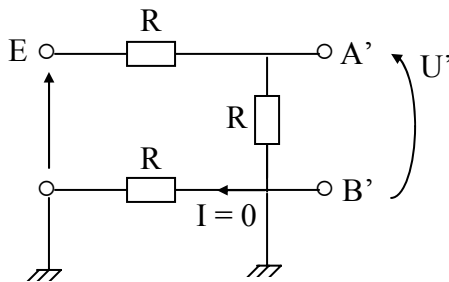
2) Un oscilloscope perturbant !

* En l'absence d'oscilloscope :



$$U = \frac{E}{3} = 4 \text{ V}$$

* En présence de l'oscilloscope :



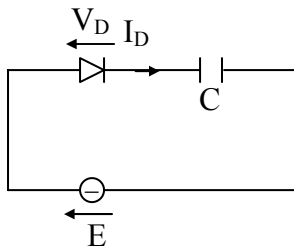
$$U' = \frac{E}{2} = 6 \text{ V}$$

(Cette fois B est « à la masse »).

3) Une diode en danger !

3.1) En régime permanent, le condensateur est un interrupteur ouvert : $I = 0$.

3.2)



$$\begin{cases} E = V_D + V_C = R_D I_D + V_C \\ I_D = C \frac{dV_C}{dt} \end{cases}$$

A $t = 0^+$, $V_C(0^+) = V_C(0^-) = 0$ par continuité de V_C

Donc :

$$I_D(0^+) = \frac{E}{R_D} = 20 \text{ A !}$$

La diode est détruite dès la fermeture de l'interrupteur.

4) Un suiveur paralysé !

4.1) Bouclage sur $\oplus \Rightarrow$ instabilité et saturation de l'AO : $v_s = \pm V_{sat}$

4.2) Pour le montage de la figure 4.a) :

$$\begin{cases} v^+ = v_s \\ v^- = v_e = \text{cste} \end{cases}$$