GRAVITATION, GRAVIMETRIE ET GEODESIE SPATIALE

Partie I : Attraction gravitationnelle et champ de pesanteur terrestre

I.A) Le champ de gravitation terrestre

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^e = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u} = q_2 \vec{E}_1(M_2) \Rightarrow \vec{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

I.A.2) Théorème de Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \vec{n}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^g = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u} = m_2 \vec{G}_1(M_2) \Rightarrow \vec{G}_1(M_2) = - \frac{G m_1}{r^2} \vec{u}$$

I.A.4) <u>Electrostatique</u>		<u>Gravitation</u>
$\vec{E}$		$\vec{G}$
q		m
$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$		$-G$

Théorème de Gauss pour le champ de gravitation :

$$\text{div } \vec{G} = -4 \pi G \rho \Leftrightarrow \oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} \vec{n}_{\text{ext}} = -4 \pi G M_{\text{int}}$$

I.A.5) a) * Symétrie sphérique : $\vec{G}_T = G_T(r) \vec{u}_r$

* Théorème de Gauss à une sphère de rayon r :

$$\oiint \vec{G}_T \cdot d\vec{S} \vec{n}_{\text{ext}} = G_T(r) 4 \pi r^2 = -4 \pi G M_{\text{int}}(r) \Rightarrow G_T(r) = - \frac{G M_{\text{int}}(r)}{r^2}$$

Énoncé en fin de document.

avec :

$$\begin{cases} M_{\text{int}}(r) = M_T & \text{si } r \geq R_T \\ M_{\text{int}}(r) = M_T \left(\frac{r}{R_T} \right)^3 & \text{si } r \leq R_T \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} G_T(r) = -\frac{GM_T r}{R_T^3} & r \leq R_T \\ G_T(r) = -\frac{GM_T}{r^2} & r \geq R_T \end{cases}$$

b)

$$G_0 = |G_T|(r=R) = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9,8 \text{ ms}^{-2}$$

c) Le résultat $M_{\text{int}}(r) = M_T$ est valable même si la terre n'est pas homogène.

$$\Rightarrow \boxed{G_T(r) = -\frac{GM_T}{r^2}} \quad \text{si } r \geq R_T \text{ reste valable}$$

d) * Pour $r \leq R_1$: $|G_T|(r) = \alpha r \Rightarrow M_{\text{int}}(r) = \beta r^3 = \int_{r'=0}^r \rho(r') 4 \Pi r'^2 dr' \Rightarrow \underline{\rho(r') = \rho = \text{cste}}$

$$\text{* Pour } r \leq R_1 : |G_T|(r) = G_0 \frac{r}{R_1} = \frac{GM_{\text{int}}(r)}{r^2} = \frac{G \times \rho \frac{4}{3} \Pi r^3}{r^2} = G \rho \frac{4}{3} \Pi r$$

D'où :

$$\boxed{\rho = \frac{3}{4 \Pi} \frac{G_0}{R_1 G} = \frac{3}{4 \Pi} \frac{M_T}{R_1 R_T^2}}$$

A.N. : $\rho \approx 10^4 \text{ kgm}^{-3}$

e) Pour $r \in [R_1, R_T]$: $|G_T(r)| = \frac{GM_{\text{int}}(r)}{r^2} = G_0 = \text{cste} \Rightarrow M_{\text{int}}(r) = \alpha r^2 = \int_0^r \rho(r') 4 \Pi r'^2 dr'$
 $\Rightarrow \rho(r)$ décroissante (en $\frac{1}{r}$)

Enoncé en fin de document.

I.B) Le champ de pesanteur terrestre

I.B.1) * Référentiel galiléen (ou inertie) : référentiel dans lequel le principe d’inertie est satisfait ($\vec{P} = \vec{cste}$ pour un système isolé).

* Référentiel géocentrique : référentiel barycentrique terrestre, en translation elliptique (quasi circulaire uniforme) par rapport au référentiel de Copernic (donc a priori non galiléen, sauf sur des durées $\Delta t \ll T_0 = 1$ an).

* Référentiel terrestre : « lié à la terre », en rotation quasi uniforme autour de l’axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique.

I.B.2)

On voit que pendant la durée T_0 , la terre a tourné de $2 \Pi + \alpha$.

Donc :

$$T = \frac{2 \Pi}{2 \Pi + \alpha} \quad (T \text{ correspond à une rotation de } 2 \Pi)$$

Or :

$$\alpha = \frac{2 \Pi}{365,25} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{365,25}{366,25} T_0 = 86164 \text{ s} \\ T_0 = 86400 \text{ s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{T_0 - T = 236 \text{ s} \approx 4 \text{ min}}$$

I.B.3)

Énoncé en fin de document.

Par définition :

$$\begin{cases} m \vec{g} = m \vec{G}_T + \vec{F}_{ie} \\ \vec{F}_{ie} = m \Omega^2 \overrightarrow{HM} \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{G}_T = - \frac{GM_T}{R_T^2} \vec{z} \\ \overrightarrow{HM} = HM (\cos \lambda \vec{z} + \sin \lambda \vec{x}) = R_T \cos \lambda (\cos \lambda \vec{z} + \sin \lambda \vec{x}) \end{cases}$$

Ainsi, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{g} \begin{cases} \Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda = g_x \\ 0 \\ - \frac{GM_T}{R_T^2} + (\Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) = g_z \end{cases}$$

D'où :

$$g^2 = g_x^2 + g_z^2$$

En ne gardant que les termes d'ordre deux en Ω $\left(\frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \ll 1 \right)$:

$$g^2 \approx \left(\frac{GM_T}{R_T^2} \right)^2 - \frac{2 GM_T \Omega^2}{R_T} \cos^2 \lambda \Rightarrow g^2 \approx \left(\frac{GM_T}{R_T^2} \right)^2 \left[1 - \frac{2 \Omega^2 R_T^3}{GM_T} \cos^2 \lambda \right]$$

D'où :

$$g(\lambda) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left[1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \cos^2 \lambda \right]$$

I.B.4) * $g_{\max} = \frac{GM_T}{R_T^2}$ pour $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ (aux pôles, $\vec{F}_{ie} = \vec{0}$)

* $g_{\min} = \frac{GM_T}{R_T^2} \left[1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \right]$ pour $\lambda = 0$ (Equateur, $m \vec{G}_T$ et $\vec{F}_{ie}$ anticolinéaires)

* $\frac{g_{\max} - g_{\min}}{g_{\max}} = \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \approx 3,5 \times 10^{-3}$

I.B.5) Pour réaliser $g_{\min} = 0$ à l'équateur, la terre devrait tourner à la vitesse angulaire :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3}} = \sqrt{\frac{g}{R_T}} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4 \times 10^3 \text{ s} \approx 1,1 \text{ h !}$$

Enoncé en fin de document.

Partie II – Forme de la terre : géoïde et ellipsoïde de référence

II.A) A l'équilibre dans le référentiel terrestre non galiléen, l'élément de volume $d\tau$ subit :

* la force de pression – $\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau$

* La force de gravitation $\rho d\tau \overrightarrow{G}_T(M)$

* La force d'inertie d'entraînement centrifuge : $d\overrightarrow{F}_e = \rho d\tau \Omega^2 \overrightarrow{HM}$

A l'équilibre :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \overrightarrow{G}_T + \rho \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{G}_T = -\frac{GM_T}{R_T^3} \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{HM} = y \overrightarrow{e}_y \end{cases}$$

II.B) En projection sur $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, on tire :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} y + \rho \Omega^2 y \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} z \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} K_1 = \rho \left(\frac{GM_T}{R_T^3} - \Omega^2 \right) \\ K_2 = \rho \frac{GM_T}{R_T^3} \end{cases}$$

II.C) Par intégration : $P(y,z) = -K_1 \frac{y^2}{2} - K_2 \frac{z^2}{2} + P_0$

A la surface de la terre :

$$P(y,z) = P_{\text{atm}} \Rightarrow -K_1 \frac{y^2}{2} - K_2 \frac{z^2}{2} + P_0 = P_{\text{atm}} \Rightarrow \frac{K_1 y^2 + K_2 z^2}{2(P_0 - P_{\text{atm}})} = 1$$

Ainsi :

$$\begin{cases} b^2 = \frac{2(P_0 - P_{\text{atm}})}{K_1} \\ c^2 = \frac{2(P_0 - P_{\text{atm}})}{K_2} \end{cases}$$

b et c respectivement demi-grand axe et demi-axe ($K_1 < K_2$, $b > c$) de l'ellipsoïde.

Enoncé en fin de document.

II.D) On a :

$$\begin{cases} \frac{b^2}{c^2} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T}} \\ M_T = \mu \frac{4}{3} \Pi b^2 c = \mu \frac{4}{3} R_T^3 \quad (R_T \text{ rayon terrestre moyen}) \end{cases}$$

D'où :

$$b^2 c = b^3 \left(1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \right)^{1/2} = R_T^3$$

Ce qui donne bien :

$$\begin{cases} b = R_T \left(1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \right)^{-1/6} \\ c = R_T \left(1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \right)^{1/3} \end{cases}$$

II.E) A.N. :

$$\begin{cases} \frac{\Omega^2 R_T^3}{6 M_T} = 3,5 \times 10^{-3} \ll 1 \\ \frac{b-c}{c} \approx \frac{R_T^3 G^2}{2 GM_T} \approx 1,76 \times 10^{-3} \end{cases}$$

II.F) Dans le modèle simplifié précédent, le champ de gravitation utilisé est celui d'une sphère homogène. Or, pour la terre assimilée à un ellipsoïde avec $\mu = \mu(r)$:

$$\vec{G}_T(r, \theta) = G_r(r, \theta) \vec{u}_r + G_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta \quad (\vec{G}_T \neq - \frac{GM_T}{R_T^3} \vec{OM})$$

Partie III : Mesure de pesanteur et de ses variations locales

III.A) Le pendule pesant

III.A.1) Le TMC scalaire s'écrit :

$$J \overset{\circ}{\theta} = m_{0x}^t (\Sigma \vec{F}_{\text{ext}}) = -mg_0 \frac{1}{2} \sin \theta \quad (\text{liaison parfaite})$$

Avec $J = \frac{1}{3} ml$, on obtient :

$$\overset{\circ}{\theta} + \frac{3g_0}{2l} \sin \theta = 0$$

Pour les petites oscillations : $\sin \theta \approx \theta$, et on a l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

Enoncé en fin de document.

$$w_0 = \sqrt{\frac{3g_0}{2l}} \text{ et période}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g_0}}$$

III.A.2) La longueur l du pendule étant supposée « parfaitement connue » ($\frac{\Delta l}{l} = 0$) :

$$T_0 = \frac{\text{cste}}{\sqrt{g_0}} \Rightarrow \frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g_0}{g_0} \Rightarrow \Delta g_0 = 2g_0(\lambda) \frac{\Delta T_0}{T_0}$$

A.N. : $\Delta g_0 \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$

III.A.3) Entre les pôles et l'équateur : $\frac{\Delta g_0}{g_0} \approx 3,5 \cdot 10^{-3}$

La précision de la mesure avec le dispositif proposé étant d'environ $2 \cdot 10^{-4}$, il est donc possible expérimentalement de mettre en évidence les différences entre g_{Equateur} et $g_{\text{Pôles}}$.

III.B) Le gravimètre à chute libre

III.B.1) a) Le rayon ① traverse 3 fois la séparatrice L_s , le rayon ② la traverse 1 fois, la lame compensatrice « compense » la différence de marche associée (on veut $\delta = 0$ pour une incidence i nulle).

b) Un filtre interférentiel permet d'obtenir une source quasi-monochromatique à partir d'une lampe spectrale.

c) Source étendue, miroirs orthogonaux, incidence $i \neq 0$: réglage en lame d'air du Michelson considéré comme diviseur d'amplitude $\Rightarrow$ franges circulaires localisées « à l'infini » (anneaux d'égale inclinaison). Les anneaux se resserrent quand on s'éloigne du centre (ρ_k varie comme $\sqrt{k}$).

d) On observe dans le plan focal image de la lentille convergente. ρ_k est proportionnel à la focale f' , d'où le choix d'une grande focale.

e) Interférence de 2 ondes cohérentes de même amplitude (source monochromatique)

$$I(\delta) = 2 I_1 \left(1 + \cos \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) \right)$$

Au « centre » (foyer image) : $i = 0 \Rightarrow \delta = 2e$

Énoncé en fin de document.

Ainsi :

$$I(e) = 2 I_1 \left[1 + \cos \left(\frac{4 \Pi e}{\lambda_0} \right) \right] = 2 I_1 (1 + \cos (4 \Pi \sigma_0 e))$$

Rem : $I_1 = \frac{I_i}{4}$ si I_i est l'intensité du rayon incident.

III.B.2) a) Lumière blanche : $\begin{cases} \lambda_2 \approx 400 \text{ nm (violet)} \\ \lambda_1 \approx 750 \text{ nm (rouge)} \end{cases}$

b) * Pour la raie spectrale de largeur $d\sigma$:

$$dI = 2(J_d d\sigma) [1 + \cos (4 \Pi \sigma_0 e)]$$

* Les diverses raies spectrales sont incohérentes et ne peuvent interférer, l'intensité résultante est donc la somme des intensités dues à chaque raie spectrale

$$I = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dI = 2 J_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (1 + \cos (4 \Pi \sigma_0 e)) d\sigma = 2 J_0 \left[\Delta\sigma + \left[\frac{\sin 4 \Pi \sigma e}{4 \Pi e} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} \right]$$

L'intensité totale de chaque rayon qui interfère est ici : $I_1 = I_2 = J_0 \Delta\sigma$

Donc :

$$I(e) = 2 I_1 \left[1 + \frac{\sin (4 \Pi \sigma_2 e) - \sin (4 \Pi \sigma_1 e)}{4 \Pi e \Delta\sigma} \right]$$

Soit finalement :

$$I(e) = 2 I_1 \left[1 + \underbrace{\text{sinc}(2 \Pi e \Delta\sigma)}_{V(e)} \cos (4 \Pi \sigma_0 e) \right]$$

Si $\begin{cases} \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 \end{cases}$

Il apparaît donc un terme de visibilité dû à la non monochromaticité de la source, et les franges vont se brouiller très rapidement à partir du contact optique (lorsque $e \nearrow$, on observe les teintes de Newton, puis du blanc d'ordre supérieur).

$\Delta\sigma$ et σ_0 sont du même ordre de grandeur pour la lumière blanche (pour une lampe spectrale type lampe à vapeur de mercure, on peut modéliser le spectre par un spectre rectangulaire de longueur $\Delta\sigma \ll \sigma_0$).

Enoncé en fin de document.

III.B.3) a)

On lance un projectile de $z = 0$ à la vitesse verticale $\vec{v}_0$.

$$* \quad \Delta t_{\text{inf}} = 2 t_0 = \frac{2 v_0}{g} \quad (\dot{z}(t) = -gt + v_0 \text{ pendant la phase ascendante}).$$

$$* \quad \Delta t_{\text{sup}} = t_2 - t_1 = 2(t_0 - t_1)$$

Avec :

$$h = -\frac{1}{2} g t_1^2 + v_0 t_1$$

D'où :

$$t_1 = \frac{v_0}{g} - \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} \quad (\text{racine} < t_0)$$

Ainsi :

$$\Delta t_{\text{sup}} = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}$$

On en déduit :

$$\Delta t_{\text{sup}} = \Delta t_{\text{inf}} = \sqrt{1 - 2gh \left(\frac{2}{g\Delta t_{\text{inf}}} \right)^2} = \Delta t_{\text{inf}} = \sqrt{1 - \frac{8h}{g\Delta t_{\text{inf}}^2}}$$

D'où finalement :

$$g = \frac{8h}{\Delta t_{\text{inf}}^2 - \Delta t_{\text{sup}}^2}$$

b) Soit $\vec{u}_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire du rayon incident sur le réflecteur.

D'après les lois de Descartes pour la réflexion :

$$\vec{u}_i \xrightarrow{M_1} \vec{u}_1 \begin{pmatrix} -\alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2} \vec{u}_2 \begin{pmatrix} -\alpha_i \\ -\beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \xrightarrow{M_3} \vec{u}_3 \begin{pmatrix} -\alpha_i \\ -\beta_i \\ -\gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} M_1 : \text{miroir } 0yz \text{ (normale } \vec{x}) \\ M_2 : \text{miroir } 0xz \text{ (normale } \vec{y}) \\ M_3 : \text{miroir } 0xy \text{ (normale } \vec{z}) \end{cases}$$

Énoncé en fin de document.

Donc $\vec{u}_r = \vec{u}_z = -\vec{u}_i$.

Le miroir plan unique ne réalise cette propriété que sous incidence normale !

c) D'après III.B.2.b), I est maximale lorsque l'épaisseur e de la lame d'air est nulle. Dans le dispositif du gravimètre absolu, deux lames d'air sont créées : la première d'épaisseur e_1 entre C et M_4 et la seconde d'épaisseur $e_2 = e_1 + d$ entre C et M_3 . Quand C est lancé vers le haut, e_1 s'annule aux instants t_1 et t_4 , et e_2 aux instants t_2 et t_3 .

Comme $d \gg \lambda_2$, les 4 maxima sont bien distincts, donc, d'après la question a) :

$$g = \frac{8d}{(t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2}$$

d) **A.N.** : $g = 9,7804 \text{ ms}^{-2}$

e) Avec une source monochromatique, il y aurait un grand nombre de maxima de I pour chaque lame d'air, et on ne pourrait savoir si e_1 ou $e_2 = 0$ ou $p \lambda_0$.

f) On utilise uniquement les miroirs M_3 et M_4 (Michelson « classique », occulter e) et on utilise une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 .

On fixe M_4 et déplace M_3 jusqu'à la teinte plate : $d = 0$ (contact optique). Puis on rapproche M_3 d'une distance d en comptant le nombre d'anneaux qui défilent, soit p .

Alors : $2d = p \lambda_0$ (et on mesure d avec une précision de l'ordre de λ_0).

III.B.4) a) D'après la question I.B.3) :

$$g(o,h) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left[1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \right] \quad (\lambda = 0, h = 0)$$

A l'altitude h , on change R_T en $R_T + h$:

$$g(o,h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \left[1 - \frac{\Omega^2 (R_T + h)^3}{GM_T} \right]$$

Pour $h \ll R_T$:

$$g(o,h) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T} \right) \left(1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \left(1 + \frac{3h}{R_T} \right) \right)$$

Comme $\frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \ll 1$, les termes en $\frac{h}{R_T} \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T}$ sont du 2^e ordre. Ainsi, au 1^{er} ordre :

$$g(o,h) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left[1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} - \frac{2h}{R_T} \right] \approx g(o,0) \left[1 - \frac{2h}{R_T} \underbrace{\left(\frac{GM_T}{R_T^2 g(o,0)} \right)}_{=1} \right]$$

$$\frac{2h}{R_T} \left(1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T} \right)^{-1} \approx \frac{2h}{R_T} \text{ au 1er ordre}$$