Centrale PC II – 2008

Enoncé en fin de document.

Centrale PC II 2008

A propos du débitmètre à effet Coriolis

Partie I – Etude préliminaire

I.A) * Loi de composition des vitesses

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

* Alors, pour $\vec{\Omega} = \overrightarrow{cste}$:

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$$

avec :
$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{v}'}{dt}\right)_R = \left(\dfrac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' \\ \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \end{cases}$$

Ainsi :
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'}$$

(loi de composition des accélérations).

$$\boxed{\begin{cases} \vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\Omega^2 X \vec{X} \\ \vec{a}_c = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}' = 2\,\Omega\, v'\, \vec{Y} \end{cases}}$$

I.B.1) Dans (R') : $\vec{a}' = \vec{0}$ ($v' = cste$), donc :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R}_{T\to M} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c + \vec{F}$$

En l'absence de frottements :

$\vec{R}_{T\to M} . \vec{X} = 0$, de sorte que :

$F = -m\,\Omega^2 X$ (pour maintenir $v' = cste$)

et

$\vec{R}_{T\to M}$	0
	$2\,m\Omega v'$
$(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	mg

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

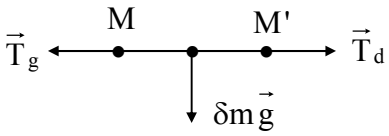
I.B.2) Principe des actions réciproques (3e loi de Newton)

$$\vec{R}_{T\to M} = -\vec{R}_{T\to M}$$

Partie II – Principe du débitmètre à effet Coriolis

II.A) Etude des vibrations du tube en absence de fluide

II.A.1) Au repos, pour un brin élémentaire de longueur dy :



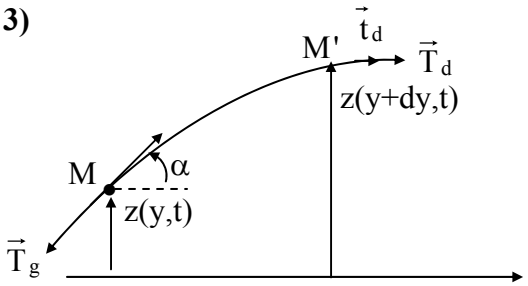
$$\vec{T}_g + \vec{T}_d + \delta m\,\vec{g} = \vec{O}$$

Comme le tube est supposé confondu avec l'axe Oy, on en déduit :

$$\begin{cases} \vec{T}_g + \vec{T}_d = \vec{O} : T_g = T_d = T_o \\ \delta m\,\vec{g} = \vec{O}\ , \text{ ce qui revient à négliger les effets de la pesanteur} \end{cases}$$

II.A.2) En mouvement

3)



$$\delta m\,\vec{a}\,(M,t) = \cancel{\delta m\,\vec{g}} + \vec{T}_g + \vec{T}_d$$

négligé

Avec : $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v}$

Or : $\vec{v} = v(y,t)\,\vec{z}$ (hypothèse H II.2)

Donc : $(\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v} = v\,\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{O}$

En projection sur $\vec{y}$ et $\vec{z}$, l'équation du mouvement du brin MM' de corde s'écrit donc :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

$$\begin{cases} \delta m = \dfrac{\partial v_z}{\partial t} = (T \sin\alpha)_{y+dy} - (T \sin\alpha)_y & (1) \\ O = (T \cos\alpha)_{y+dy} - (T \cos\alpha)_y & (2) \end{cases}$$

Comme $\alpha \to 0$ (hypothèse H.II.3) (2) donne :

$$T_{y+dy} = T_y = \text{cste } T_0$$

Puis, (1) s'écrit alors : $\delta m \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \dfrac{\partial}{\partial y} (\sin\alpha)\, dy$

Avec toujours : $\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

D'où : $\delta m \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy$

Enfin : $\delta m = \mu\, ds \quad (ds = \widehat{MM'}I) = \mu \dfrac{dy}{\cos\alpha} \approx \mu dy$

Et finalement : $\boxed{\mu \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$ (E_1)

II.A.4) On obtient une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{si} \quad \boxed{C = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

La solution la plus générale est : $z(y,t) = z^+\left(t - \dfrac{y}{C}\right) + z^-\left(t + \dfrac{y}{C}\right)$, superposition de 2 OPP se propageant selon 0y croissant et décroissant respectivement..

II.A.5) a) On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire (i.e. non progressive) :

$$\underline{z(y,t) = f(y)g(t)}$$

b) Alors, l'équation (E_1) s'écrit :

$$f''(y)g(t) = \frac{1}{C^2} f(y) \overset{oo}{g}(t)$$

Soit : $\underbrace{\dfrac{\overset{oo}{g}(t)}{g(t)}}_{G(t)} = \underbrace{C^2 \dfrac{f''(y)}{f(y)}}_{F(y)}$, donc = cste

• Si cste > 0, on aurait $f(y) = F_1 ch(ky) + F_2 sh(ky)$ qui ne peut satisfaire aux conditions aux limites $f(0) = f(D) = 0$ sauf à être identiquement nulle.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

• Si cste = 0, on aurait $f(y) = F_1 y + F_2$, et de même les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites.

Donc nécessairement : $\text{cste} = -w^2 < 0$

Alors : $\overset{oo}{g}(t) + w^2 g(t) = 0$

$$f''(y) + \underbrace{\frac{w^2}{C^2}}_{k^2} = f(y) = 0$$

D'où : $\boxed{z(y,t) = Z \cos(wt + \varphi) \sin(ky + \psi)}$

avec $\boxed{k = \frac{w}{C}}$

c) * Conditions aux limites : $z(0,t) = z(L,t) = 0, \forall t$

$\Rightarrow \quad \psi = 0$

$kL = p\Pi$, $p \in N^*$: $\boxed{k_p = \frac{p\Pi}{L}}$

* Dispositif excitateur : $z\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 \cos(2\Pi f t)$, $\forall t$

$\Rightarrow \quad Z \cos(wt + \varphi) \sin\left(\frac{p\Pi}{2}\right) = Z_0 \cos(2\Pi f t)$

II.B) Interaction entre le fluide en écoulement et le tube vibrant

II.B.1) Ecoulement incompressible : $\text{div}\,\vec{v} = 0$

Soit, en négligeant la courbure du tube (au 1er ordre) : $\boxed{\frac{dv}{dy} = 0}$: v(M) uniforme.

II.B.2) Dans le cadre d'un écoulement parfait, la force exercée par le tube sur le fluide est localement normale au tube, i.e. dirigée selon $\vec{Z}$.

II.B.3) Forces s'exerçant sur la particule de fluide dans (R') :

* Poids $\delta m\,\vec{g} = \rho s dy\,\vec{g}$
* Forces de pression : $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P\delta V = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(s\delta y)$
* Forces d'inertie $\delta\vec{Fi}_e$ et $\delta\vec{Fi}_c$
* $\delta\vec{F}(T \to F)$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

Centrale PC II – 2008

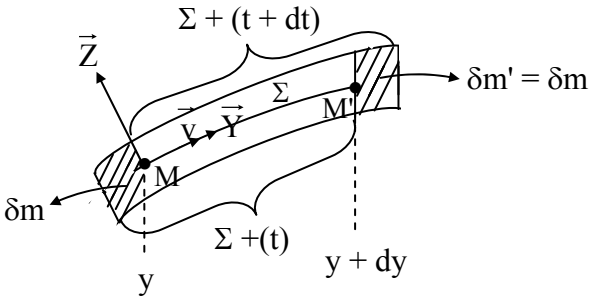
Enoncé en fin de document.

Rem. : $\vec{\Omega}(R'/R) = \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}\,\vec{z}$, avec $\alpha \approx \dfrac{\partial z}{\partial y}$, ce qui justifie l'expression de $\vec{a}_c$ donnée par l'énoncé.

II.B.4.) $* \; \delta \vec{Fi}_e = -\delta m\, \vec{a}_e = -\delta m \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\vec{z}$

$* \; \delta \vec{Fi}_c = -\delta m\, \vec{a}_c = 2\,\delta m \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial t}\, v\,\vec{Z}$

II.B.5)



$$\begin{cases} \delta \vec{p}^{\,*}(t) = \delta \vec{p}\,(t) = \delta m v \vec{Y} \\ \delta \vec{p}^{\,*}(t + dt) = \delta \vec{p}\,(t + dt) + \delta m' v \vec{Y}\,' \end{cases}$$

Avec $\delta \vec{p}\,(t) = \delta \vec{p}\,(t + dt)$ (régime permanent dans (R')).

De plus : $\vec{Y} = \cos\alpha\,\vec{y} + \sin\alpha\,\vec{z} \approx \vec{y} + \alpha\,\vec{z}$

$\vec{Y}\,' = \cos\alpha'\,\vec{y} + \sin\alpha'\,\vec{z} \approx \vec{y} + \alpha'\,\vec{z}$

Donc : $\vec{Y}\,' - \vec{Y} \approx (\alpha' - \alpha)\,\vec{z} = (\alpha' - \alpha)\,[\cos\alpha\,\vec{Z} - \sin\alpha\,\vec{Y}\,]$

$\approx (\alpha' - \alpha)\,\vec{Z}$ au 1er ordre en α

$\approx \left[\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{y}\right]\vec{Z}$

$\approx dy \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\vec{Z}$

Finalement : $\dfrac{d}{dt}(\delta \vec{p}^{\,*}) = \dfrac{\delta \vec{p}^{\,*}(t + dt) - \delta \vec{p}^{\,*}(t)}{dt} \approx \dfrac{\delta m}{dt}\, v\, dy \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\vec{Z}$

Soit : $\boxed{\dfrac{d}{dt}(\delta \vec{p}^{\,*}) = D_m\, v\, dy \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\vec{Z}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

II.B.6) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la particule de fluide dans (R'), on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\delta \vec{p}^{*}) = \delta m \vec{g} - \overrightarrow{grad}\, P\delta V + \delta \vec{F}_{T\to F} + \delta \vec{Fi}_e + \delta \vec{Fi}_c$$

Avec P = P(y) et $\vec{Z}.\vec{z} = \cos\alpha \approx 1$ au 1er ordre, on déduit par projection sur $\vec{Z}$:

$$D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \vec{Z} \approx -\rho s dy g \vec{Z} + \overbrace{\delta \vec{F}_{T\to F}}^{-\delta \vec{F}_{F\to T}} - \rho s dy \left[2v\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right]\vec{Z}$$

Soit finalement, puisque $\rho s v = D_m$:

(2) $$\boxed{\delta \vec{F}_{F\to T} = -\left[g + \rho s\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) + D_m\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + v\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right]dy\vec{Z}}$$

II.B.7) a) Origine des 4 termes

* Poids du fluide
* Effets de $\vec{a}_e$ (accélération verticale du tronçon de tube)
* Effet de $\vec{a}_c$ (rotation dans (R) du tronçon de tube)
* Variation de l'orientation de l'écoulement du fluide, en raison de la courbure du tube

b) Entre t et t + dt, le tronçon a tourné ($\alpha = \frac{\partial z}{\partial y}$ a varié), donc les molécules de fluide ont changé de direction de déplacement dans (R), d'où une force du tube sur le fluide opposée à $\delta \vec{F}_{F\to T}$.

II.C) Etude des vibrations du tube en présence d'un écoulement

II.C.1) Pour le tube au repos :

$$\delta \vec{F}_{0\,(F\to T)} = -\rho s g dy \vec{z}$$

Comme le tube au repos parcouru par l'écoulement de fluide est confondu avec l'axe horizontal 0y :

$$\delta \vec{F}_{0\,(F\to T)} \approx \vec{0} \qquad \text{(poids de la particule de fluide négligé)}$$

II.C.2) On reprend l'équation du mouvement d'une tranche de tube (fluide non compris) comprise entre y et y + dy, dans (R) galiléen :

$$\delta m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{T}_g + \vec{T}_d + \delta \vec{F}_{(F\to T)}$$

En projection sur $\vec{z}$, on obtient donc :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

Centrale PC II – 2008

Enoncé en fin de document.

$$\underbrace{\delta m}_{\mu}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = T_0\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy - \left[\rho s\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + D_m\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + v\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right]dy$$

Soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - K_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\,K_2\,D_m\,\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = 0}$$

Avec :

$$\boxed{\begin{cases} K_1 = \dfrac{\mu + \rho s}{T_0 - vD_m} \\ K_2 = \dfrac{1}{T_0 - vD_m} \end{cases}}$$

II.3.C) a) En injectant dans l'équation aux dérivées partielles précédentes une solution $\underline{z}(y,t) = \underline{G}(y)e^{jwt}$, on obtient :

$$\underline{G}''(y) + K_1w^2\underline{G}(y) - 2\,K_2D_mjw\underline{G}'(y) = 0$$

Soit, en ordonnant les termes :

$$\boxed{\underline{G}''(y) - 2\,K_2D_mjw\underline{G}'(y) + K_1w^2\underline{G}(y) = 0}$$

$$\Delta' = (K_2D_mjw)^2 - K_1w^2 = -(K_1 + K_2^2D_m^2)w^2 < 0$$

Racines de l'équation caractéristique :

$$r = K_2D_mjw \pm j\sqrt{-\Delta'}$$

Posons

$$\boxed{\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{1}{K_2D_mw} \\ \delta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{-\Delta'}} = \dfrac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2D_m^2}w} \end{cases}}$$

Alors :

$$r = j\left(\frac{1}{\delta_1} \pm \frac{1}{\delta_2}\right)$$

et :

$$\boxed{\underline{G}(y) = e^{j\frac{y}{\delta_1}}\left[\underline{A}\,e^{j\frac{y}{\delta_2}} + \underline{B}\,e^{-j\frac{y}{\delta_2}}\right]}$$

Rem. : * $[K_2] = \left[\frac{1}{F}\right]$, donc $\left[\frac{1}{K_2D_mw}\right] = \left[\frac{F}{m}\tau^2\right] = [L]$, ce qui assure que δ_1 est bien une longueur.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

Centrale PC II – 2008

Enoncé en fin de document.

$$* \left[\frac{K_2^2 D_m^2}{K_1}\right] = \left[\frac{K_2 D_m^2}{\mu K_2}\right] = \left[\frac{K_2 D_m^2}{\mu}\right] = \left[K_2 \frac{m^2}{\tau^2} x \frac{L}{m}\right] = \left[K_2 \, m \frac{L}{\tau^2}\right] = \left[\frac{mL}{F\tau^2}\right],$$

ce qui assure que K_1 a la même dimension que $K_2^2 D_m^2$, et donc l'homogénéité de l'expression donnant δ_2.

b) Conditions aux limites :

* $\underline{G}(y = 0) = 0 \Rightarrow \underline{B} = -\underline{A}$, et :

$$\underline{G}(y) = 2\, j\underline{A}\, e^{j\frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{y}{\delta_2}\right)$$

* $\underline{G}(y = L) = 0 \Rightarrow \frac{L}{\delta_2} = n\Pi$, donc :

$$\boxed{\underline{G}(y) = 2\, j\underline{A}\, e^{j\frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{n\Pi y}{L}\right)}$$

avec : $\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2}\, w_n = \frac{n\Pi}{L} \Rightarrow \boxed{w_n = \frac{n\Pi}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2}}}$

Rem. : Si $\begin{cases} D_m = 0, K_1 = \frac{\mu}{T_0} = \frac{1}{C^2} \\ l = 0 \end{cases}$, on retrouve les pulsations en l'absence d'écoulement.

II.C.4) a) Si $D_m = 0$, $\rho \neq 0$, l'équation (3) redevient une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - K_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

La propagation se fait alors à la célérité : $C' = \frac{1}{\sqrt{K_1}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu'}}$, si $\mu' = \mu + \rho s$ est la masse linéique de l'ensemble tube + eau contenue.

b) Pour le fondamental :

$$w_1 = \frac{\Pi}{L\sqrt{K_1}} = 2\,\Pi f \Rightarrow \frac{1}{L^2 K_1} = 4\, f^2 = \frac{1}{L^2}\frac{T_0}{\mu'}$$

D'où : $\boxed{T_0 = 4\, f^2 L^2 \mu'}$

A.N. : $\underline{T_0 = 195\ N}$

c) Pour $D_m = 0$: $\delta_1 \to \infty$, $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{K_1} w_1} = \frac{\Pi}{L}$ d'après II.C.3)a) :

$$\underline{z}(y,t) = 2\, jA \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) e^{jw_1 t}$$

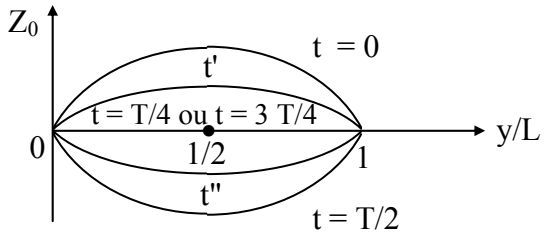
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

avec : $\underline{z}\left(\frac{L}{2},t\right) = Z_0 \cos w_1 t \Rightarrow 2\,jA = Z_0$

donc : $$z(y,t) = Z_0 \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right)\cos(w_1 t)$$

d) 2 points symétriques par rapport à B vibrent en phase avec la même amplitude.



II.C.5) Pour $D_m \neq 0$ et vibrations sur le mode fondamental :

$$\underline{z}(y) = 2\,j\underline{A}\,e^{j\frac{y}{\delta_1}}\sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right)e^{jw_1 t}$$

avec $$w_1 = \frac{\Pi}{L}\frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2{}^2 D_m{}^2}} = 2\,\Pi f$$

Par ailleurs : $$\underline{z}\left(\frac{L}{2},t\right) = Z_0 e^{jw_1 t} = 2\,j\underline{A}\,e^{j\frac{y}{2\delta_1}}e^{jw_1 t} \Rightarrow 2\,j\underline{A} = Z_0\,e^{-j\frac{y}{2\delta_1}}$$

D'où : $$\underline{z}(y,t) = Z_0\,e^{\frac{j}{\delta_1}\left(y-\frac{L}{2}\right)}\sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right)e^{jw_1 t}$$

Et en notations réelles :

$$z(y,t) = Z_0 \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right)\cos\left[w_1 t + \frac{1}{\delta_1}\left(y - \frac{L}{2}\right)\right]$$

Donc : $$K = \frac{1}{\delta_1} = K_2 D_m w_1 = K_2 D_M\,(2\,\Pi f)$$

II.C.6) a) Raisonnons avec $D_m > 0$

* Pour $y < \frac{L}{2}$: le tube est en retard par rapport au mouvement qu'il avait lorsque $D_m = 0$.

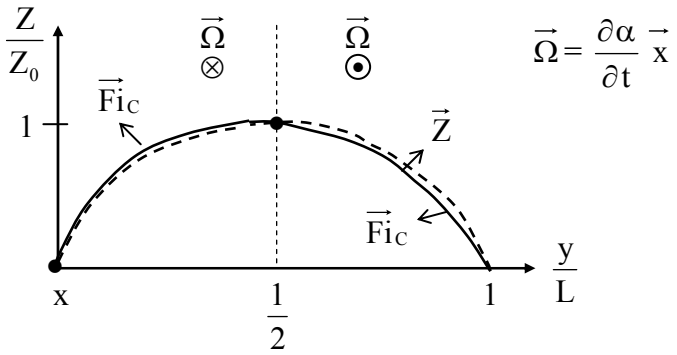
* Pour $y > \frac{L}{2}$: il est en avance.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

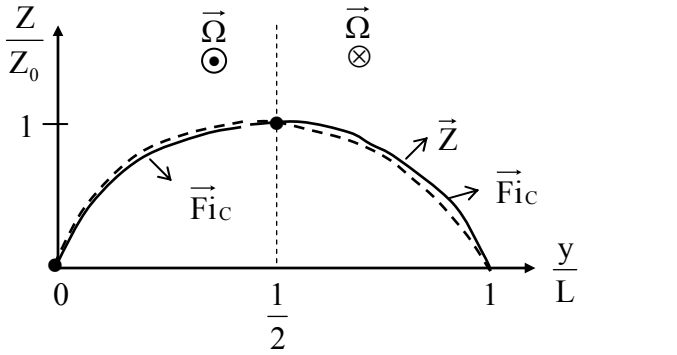
Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

b) Pour KL << 2 Π :

* Pour $t \in]0, \frac{T}{4}[$ (mouvement du tube « descendant ») :



* Pour $t \in]\frac{3T}{4}[$ (mouvement du tube « montant ») :



c) Par rapport au cas $D_m = 0$, on tient compte de $\vec{Fi}_C$ de la question II.B.4), dirigée selon $\vec{Z}$ (orthogonale au tube). Son sens dépend du signe de $\Omega = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ ($\Omega < 0 \Rightarrow \vec{Fi}_C$ selon + $\vec{Z}$).

II.C.7) a) Pour les points A et C :

$$\boxed{Z_1 = Z_0 \sin\frac{\Pi}{4} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}} = 0{,}71 \text{ mm}}$$

b) $\begin{cases} \varphi_C = K\left(\frac{3L}{4} - \frac{L}{2}\right) \\ \varphi_A = K\left(\frac{L}{4} - \frac{L}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_C - \varphi_A = K\frac{L}{2} = \Pi K_2 D_m f L}$

c) Avec $K_2 = \frac{1}{4 f^2 L^2 \mu'}$: $\boxed{\varphi = \frac{\Pi D_m}{4 f L \mu'}}$ est proportionnel à D_m

A.N. : $\boxed{\varphi = 0{,}258\ D_m}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

Centrale PC II – 2008

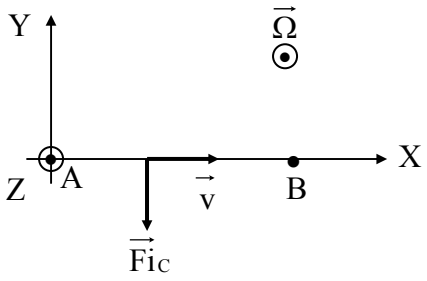
Enoncé en fin de document.

II.D) Autre géométrie de débitmètre à effet Coriolis : le tube en U

II.D.1) En l'absence d'écoulement, le plan (0xy) est plan de symétrie, donc :

$$y_B(t) = y_E(t), \forall t$$

II.D.2) * Pour $\Omega > 0$, branche AC : la force de Coriolis a la direction et le sens de $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$, donc dirigée selon $-\vec{Y}$:



* Pour $\Omega > 0$, branche FD : $\vec{v}$ est cette fois selon $-\vec{X}$, donc $\vec{Fi}_C$ selon $+\vec{Y}$.

Pour $\Omega < 0$, ces résultats sont inversés.

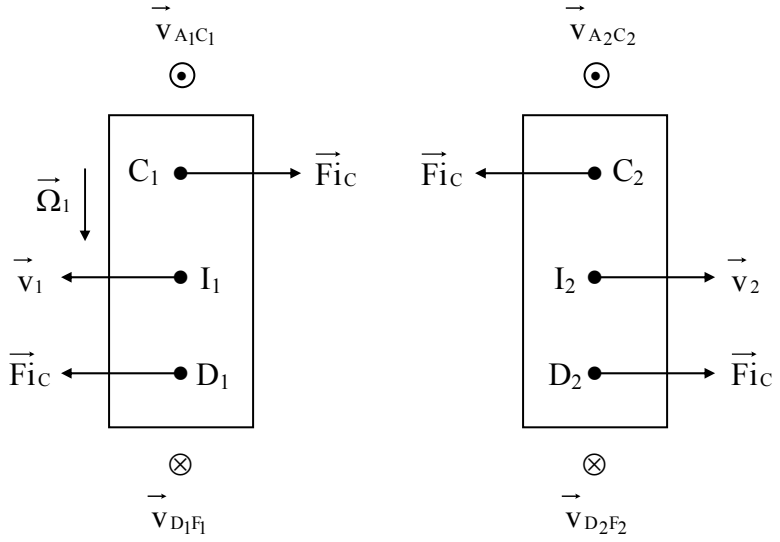
II.D.3) * Sur la branche CD : $\vec{\Omega}$//tube, donc $\vec{Fi}_C$ y est nulle.

* Sur les branches AC et DF, les forces de Coriolis sont opposées, donc la branche CD est soumise à un couple de forces oscillantes et oscille autour de l'axe 0X.

II.D.4) Les mouvements de B et E dans le référentiel (R') lié à I sont alors en opposition de phase.

II.D.5) * Les mouvements des deux branches doivent être en opposition de phase pour que les capteurs (qui mesurent la séparation entre les 2 tubes) voient une amplitude maximale du mouvement.

* Schéma



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

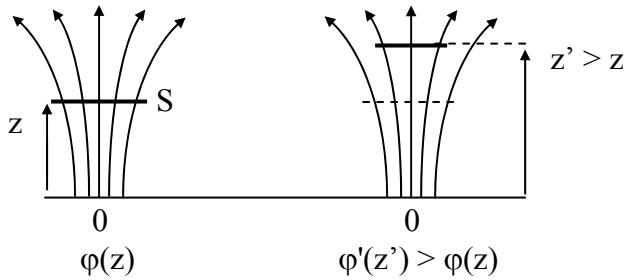
Centrale PC II – 2008

Enoncé en fin de document.

Partie III : Etude d'un capteur de vitesse

III.A) Principe de fonctionnement du capteur

III.A.1) Comme $\vec{B}$ est à flux conservatif, ϕ ne dépend pas de la surface s'appuyant sur la bobine, on peut donc prendre la surface du disque (pour une spire). Ce flux φ ($\phi = N\varphi$) dépend donc de z et diminue avec z, compte tenu de l'incurvation et de la diminution de B lorsque z augmente.



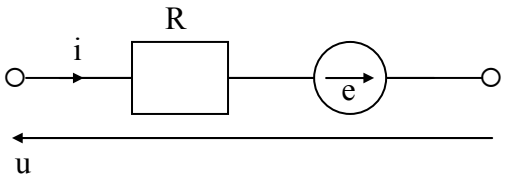
III.A.2) Les vibrations du tube font osciller la bobine, qui, parcouru par un flux $\phi(t)$ non permanent, va être le siège d'une fem induite :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

III.A.3) a) ARQS : I(M,t) = i(t) (négliger la propagation d'une onde de courant entre A et B)

Validité : AB << $\lambda = c\tau$ (τ temps caractéristique de variation de i(t)).

b) Schéma électrique équivalent : $\boxed{u = Ri - e}$



III.A.4)

$$\begin{cases} e = -\dfrac{d\phi}{dt} \text{ (loi de Faraday)} \\ \phi = N\varphi \end{cases}$$

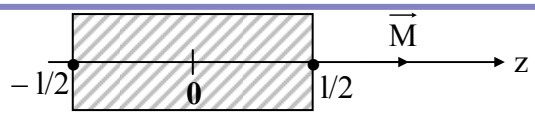
$$\Rightarrow \quad \boxed{u = +N\frac{d\varphi}{dt} + Ri \approx N\frac{d\varphi}{dt}} \quad \text{en négligeant la résistance de la bobine}$$

III.A.5) $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dz}\dfrac{dz}{dt} = v\dfrac{d\varphi}{dz} \Rightarrow \boxed{u = N\,v\dfrac{d\varphi}{dz}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

III.B.1)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\,\vec{z}$$

En $z = \frac{l}{2}$: $\begin{cases} \theta_2 = \frac{\Pi}{2} \\ \cos\theta_1 = \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad B\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\mu_0 M}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}} = 0{,}33 \text{ T}$$

Il s'agit d'un champ très intense, bien supérieur aux champs obtenus à l'aide de bobines « usuelles », de l'ordre de 10^{-4}T (solénoïde infini, i = 0,1 A, n = 1000 spires/n : $B = \mu_0 ni = 4\,\Pi\,10^{-5}$T).

III.B.2) On a : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} \\ \cos\theta_2 = \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} \end{cases}$ ($\forall$ position de M !)

D'où : $$\boxed{B(z) = \frac{\mu_0 M}{2}\left[\frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}}\right]}$$

III.B.3) On a : $B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} f(z)$

Donc : $\varphi \approx \Pi R^2 B(z)$

et : $u = Nv\Pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} f'(z)$

La réponse maximale du capteur correspond donc au maximum de $|f'(z)|$ donc à

$\boxed{z = d = 5 \text{ mm}}$.

III.C) Etude de la tension aux bornes de la bobine

III.C.1) $\phi = N\varphi$

$$\varphi = \iint_{1\,\text{spire}} B_z(r,z)\,dS = \int_{r=0}^{R}\left[B(z) - \frac{r^2}{4}B''(z)\right]2\,\Pi r dr = 2\,\Pi\left[\frac{R^2}{2}B(z) - \frac{R^4}{16}B''(z)\right]$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

D'où : $$\boxed{\phi = N\Pi R^2\left[B(z) - \frac{R^2}{8}B''(z)\right]}$$

III.C.2) Avec $\begin{cases} B(z) = \dfrac{\mu_0 M}{2} f(z) \\ \dfrac{R^2}{8}B''(z) = \dfrac{R^2}{8}\dfrac{\mu_0 M}{2} f''(z) \end{cases}$

Donc, avec R = 2 mm : $\frac{R^2}{8} = \frac{1}{2}\,mm^2$.

Ainsi : $$\boxed{\phi(z) = N\Pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2}\underbrace{\left[f(z) - \frac{1}{2}f''(z)\right]}_{g(z)}}$$

Au voisinage de z = d = 5 mm, g(z) est une droite de pente : $\underline{g'(z) = 0{,}7\ mm^{-1}}$.

III.C.3) On a : $u = v\frac{d\phi}{dz}$, avec :

$$\boxed{\frac{d\phi}{dz} = N\Pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} g(z) = -310^{-4} Wbmm^{-1}}$$

III.C.4) Aux points A et C : $V_1 = wZ_1 = 2\,\Pi f Z_1$, avec $Z_1 = 0{,}7$ mm

Donc : $$\boxed{U_0 = V_1\left|\frac{d\phi}{dz}\right| = 2\,\Pi f Z_1\left|\frac{d\phi}{dz}\right|}$$

A.N. : $\boxed{U_0 = 0{,}11\ V}$

III.C.5) a) Approximations principales

* Négliger la résistance R de la bobine, ce qui conduit à surévaluer le coefficient de proportionnalité entre u et v (en valeur absolue, soit $\left|\frac{d\phi}{dz}\right|$).

* Linéariser g(z) au voisinage de z = d, comme $|g'(z)| < |g'(d)|$ pour z voisin de d, cette approximation conduit également à surévaluer ce coefficient.

b) C'est le déphasage entre A et C qui permet d'accéder au débit (question II.C.7) et non l'amplitude des mouvements, donc il n'est pas nécessaire de connaître ce coefficient avec exactitude.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.

Centrale PC II – 2008

Enoncé en fin de document.

Partie IV : Filtrage du signal et mesure du déphasage

IV.A.1) * Signaux de fréquence inférieure à f = 80 Hz : rayonnement du réseau électrique à f' = 50 Hz.

* Signaux de fréquence supérieure à f : harmoniques du rayonnement précédent, harmoniques de vibrations du tube.

IV.A.2) * Pour réduire l'amplitude de ces parasites : filtre passe-bande accordé sur la fréquence f.

* Etablissons l'expression de $\underline{H}(jw)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \underline{V}^+ = \dfrac{\underline{Y}_3 \underline{V}_p}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \\ \bullet\ \underline{V}^- = \dfrac{r}{r + (k-1)\,r}\,\underline{V}_s = \dfrac{\underline{V}_s}{k} \end{array}\right\} \quad \underline{V}^+ = \underline{V}^- \Rightarrow \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}\,\underline{V}_p = \frac{\underline{V}_s}{k}$$

$$\bullet\ V_p = \frac{\underline{Y}_2 \underline{V}_e + \underline{Y}_3 \underline{V}^+ + \underline{Y}_1 \underline{V}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

D'où :

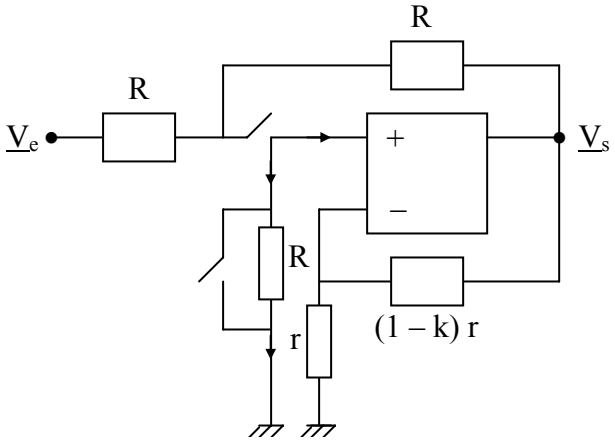
$$\frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}\left[\frac{\underline{Y}_2 \underline{V}_e + \dfrac{\underline{Y}_3}{k}\underline{Y}_3 \underline{V}_s + \underline{Y}_1 \underline{V}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}\right] = \frac{\underline{V}_s}{k}$$

$$\Rightarrow \quad V_s\left[(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) - \underline{Y}_3^{\,2} - k\underline{Y}_1\underline{Y}_3\right] = k\underline{Y}_2\underline{Y}_3\underline{V}_s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{H} = \frac{k\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\underline{Y}_4\,(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) + \underline{Y}_3\,(\underline{Y}_2 + (1-k)\,\underline{Y}_1)}}$$

IV.A.3) $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \dfrac{1}{R}$ $\qquad \underline{Y}_3 = jcw$ $\qquad \underline{Y}_4 = \dfrac{1}{R} + jcw$

* Schéma « basse fréquence » ($w \to \infty$)



Alors : $\underline{V}^+ = 0 = \underline{V}^- \Rightarrow \boxed{\underline{V}_s = 0}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 38 pages.