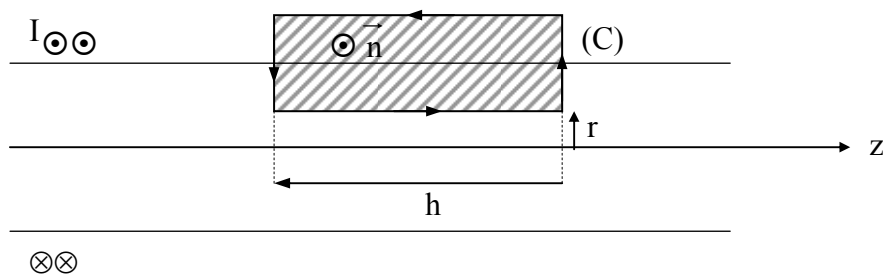


DISPOSITIF MAGNETIQUE

I – CREATION DE CHAMPS MAGNETIQUES AYANT DES PROPRIETES PARTICULIERES

I.A) Champ uniforme : solénoïdes et bobines de Helmholtz

1) Solénoïde « infini » ($l \gg R$)



*Symétrie : la distribution de courants est invariante dans toute translation selon $0z$: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} =$

$\vec{0}$, et dans toute rotation autour de $0z$: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = \vec{0}$.

Par ailleurs, tout plan perpendiculaire à $0z$ est plan de symétrie pour les courants : \vec{B} , pseudo-vecteur, lui est orthogonal : $\vec{B} \parallel 0z$. Finalement :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$$

* $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$: on peut le justifier en considérant le solénoïde infini comme la limite d'un tore de rayon moyen $R \rightarrow \infty$. Pour le tore, le théorème d'Ampère donne trivialement $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

* On applique alors le théorème d'Ampère au contour rectangulaire orienté (C) :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \ll I_{\text{enlacée}} \gg$$

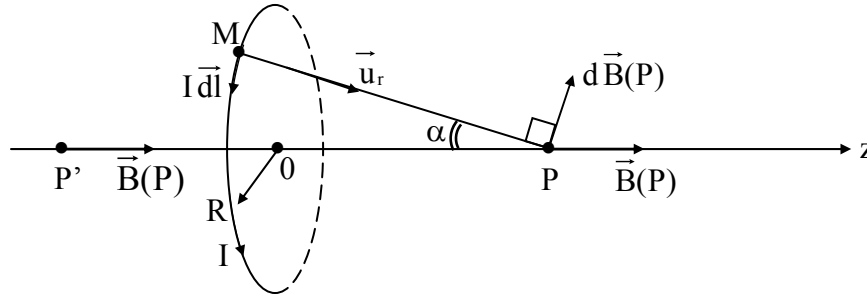
$$0 + 0 + 0 + B(r)h \quad \underbrace{Ih \left(n = \frac{N}{l} \right)}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z & r < R \\ \vec{B} = \vec{0} & r > R \end{cases}$$

Enoncé en fin de document.

2) Spire circulaire



* Symétrie : tout plan contenant Oz est plan d'antisymétrie pour la distribution de courants, donc $\vec{B}(P) = B(z) \vec{e}_z$.

Le plan de la spire est plan de symétrie, donc $\vec{B}(P') = \vec{B}(P) : B(-z) = B(z)$.

* On calcule \vec{B} par Biot et Savart :

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$dB_z(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha$$

D'où :

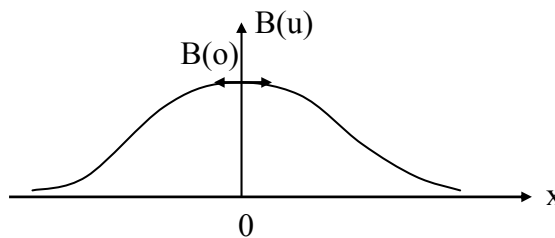
$$B(z) = \oint_{\text{spire}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} \times 2\pi R \quad \text{avec } \sin\alpha = \frac{R}{r}$$

Soit :

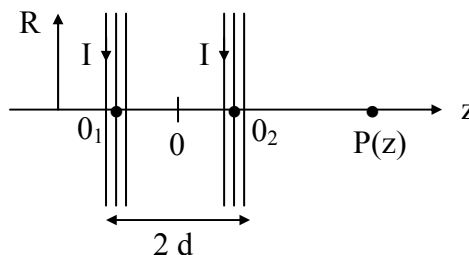
$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r^2} = \frac{\mu I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Finalement :

$$B(u) = B(0) \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{z}{R} \\ B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \end{array} \right.$$



3) Bobines de Helmholtz



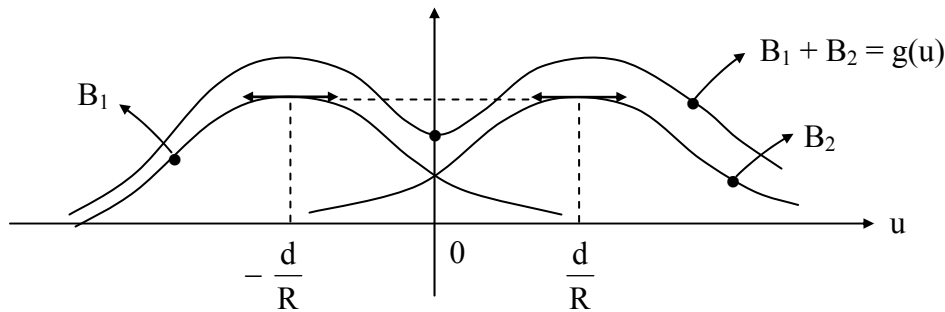
Énoncé en fin de document.

Soit $f(u) = \frac{NB(o)}{(1+u^2)^{3/2}}$ le champ créé en P par une bobine centrée en 0, et $g(u)$ le champ créé par les bobines de Helmholtz. Alors :

$$g(u) = \underbrace{f\left(u + \frac{d}{R}\right)}_{B_1} + \underbrace{f\left(u - \frac{d}{R}\right)}_{B_2}$$

Ainsi :

$$g(u) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left[\frac{1}{\left[1 + \left(u + \frac{d}{R}\right)^2\right]^{2/3}} + \frac{1}{\left[1 + \left(u - \frac{d}{R}\right)^2\right]^{2/3}} \right]$$

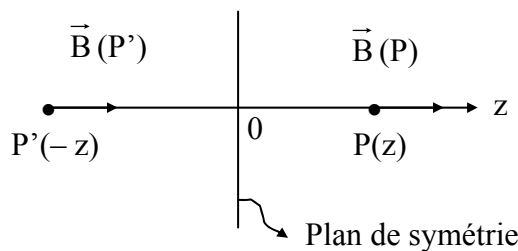


Rem. : la courbe ci-dessus est tracée dans le cas général. Pour $d = \frac{R}{2}$, le champ $g(u)$ est quasi uniforme entre 0_1 et 0_2 .

4) * Le plan 0xy est plan de symétrie pour la distribution de courants.

Donc :

$$\vec{B}(P') = -S(\vec{B}(P))$$



Soit :

$$B(-z) = B(z)$$

* On a, au voisinage de 0 :

$$\left\{ \begin{aligned} \left(1 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3/2} &\approx \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[1 - \frac{6u}{5} + \frac{32}{25}u^3 - \frac{144}{125}u^4\right] \\ \left(1 + \left(u - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3/2} &\approx \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[1 + \frac{6u}{5} - \frac{32}{25}u^3 - \frac{144}{125}u^4\right] \end{aligned} \right.$$

Enoncé en fin de document.

Ainsi :

$$\tilde{g}(u) = g(0) \left[1 - \frac{144}{125} u^4 \right]$$

Avec :

$$g(0) = \frac{\mu_0 N I}{R} \frac{8}{5\sqrt{5}} = \gamma$$

5) $\tilde{g}(u) = \text{cte}$ à mieux que 2 % près si :

$$\frac{144}{125} u^4 < 0,02 \Rightarrow |u| < 0,36$$

6) * La distribution de courant est invariante dans toute rotation autour de Oz : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = \vec{0}$.

* Tout plan contenant Oz est plan d'antisymétrie pour les courants : $B_\theta = 0$. Ainsi :

\vec{B}	$B_r(r,z)$
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$	0
	$B_z(r,z)$

7) On a : $B_z(r,z) \approx \tilde{g}(z) + \alpha r^2 \tilde{g}''(z) + \beta(r)$

Les équations de Maxwell s'écrivent, pour le champ (en régime permanent) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ \text{rot } \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) = -\tilde{g}'(z) + \alpha r^2 \tilde{g}^{(3)}(z) \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} = 2\alpha r \tilde{g}''(z) + \beta'(r) \end{array} \right.$$

Ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) = -r \tilde{g}'(z) - \alpha r^3 \tilde{g}^{(3)}(z) \\ \frac{\partial}{\partial z} (rB_r) = 2\alpha r^2 \tilde{g}''(z) + r\beta'(r) \end{array} \right.$$

D'après le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rB_r) \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial z} (rB_r) \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} -r \tilde{g}''(z) - \alpha r^3 \tilde{g}^{(4)}(z) &= 4\alpha r \tilde{g}''(z) + \beta'(r) + r\beta''(r) \\ \Rightarrow (4\alpha + 1) r \tilde{g}''(z) &= -\alpha r^3 \tilde{g}^{(4)}(z) - \beta'(r) - r\beta''(r) \end{aligned}$$

Énoncé en fin de document.

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}(z) = \gamma (1 - \delta z^4) \quad \text{si } \delta = \frac{144}{125} \cdot \frac{1}{R^4} \\ \tilde{g}'(z) = -4 \gamma \delta z^3 \\ \tilde{g}''(z) = -12 \gamma \delta z^2 \\ \tilde{g}^{(3)}(z) = -24 \gamma \delta z \\ \tilde{g}^{(4)}(z) = -24 \gamma \delta \end{array} \right.$$

On obtient donc :

$$\underbrace{-12 \gamma \delta z^2 (4 \alpha + 1)}_{F(z)} = \underbrace{24 \gamma \delta \alpha r^2 - \frac{\beta'/r}{r} - \beta''/r}_{G(r)} \Rightarrow \begin{cases} F(z) = \text{cste} = 0 : \\ G(r) = \text{cste} \end{cases} \quad \boxed{\alpha = -\frac{1}{4}}$$

On a alors : $G(r) = 0 \Rightarrow r\beta''(r) + \beta'(r) + 6 \gamma \delta r^3 = 0$

Soit : $\frac{d}{dr}(r\beta'(r)) = -6 \gamma \delta r^3 \Rightarrow r\beta'(r) = -\frac{3}{2} \gamma \delta r^4 + C$

Comme $\beta(0)$ est définie : $C = 0$

D'où : $\beta'(r) = -\frac{3}{2} \gamma \delta r^3$

Et finalement : $\boxed{\beta(r) = -\frac{3}{8} \gamma \delta r^4 + O}$ ($\beta(0) = 0$ car $B_z(0, z) = \tilde{g}(z)$)

On tire alors : $\boxed{B_z(r, z) = \gamma (1 - \delta z^4) + 3 \gamma \delta r^2 z^2 - \frac{3}{8} \gamma \delta r^4}$

Puis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} = 6 \gamma \delta r z^2 - \frac{3}{2} \gamma \delta r^3 \quad (1) \\ \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -r \frac{\partial B_z}{\partial r} = +4 \gamma \delta r^3 - 6 \gamma \delta r^3 z \quad (2) \end{array} \right.$$

De (1), on tire : $B_r(r, z) = 2 \gamma \delta r z^3 - \frac{3}{2} \gamma \delta r^3 z + F(r)$

Donc : $\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = 4 \gamma \delta r z - 6 \gamma \delta r^3 z + \frac{d}{dr}(rF(r))$

D'après (2), on a alors : $\frac{d}{dr}(rF(r)) = 0 : F(r) = \frac{C}{r}$

Mais, comme B_r est bornée sur l'axe : $C = 0$

Rem. : On peut aussi invoquer que $B_r(r = 0, z) = 0 \Rightarrow F(r) = 0$ (ce qui évite d'utiliser l'équation (2)).

Enoncé en fin de document.

Au final :

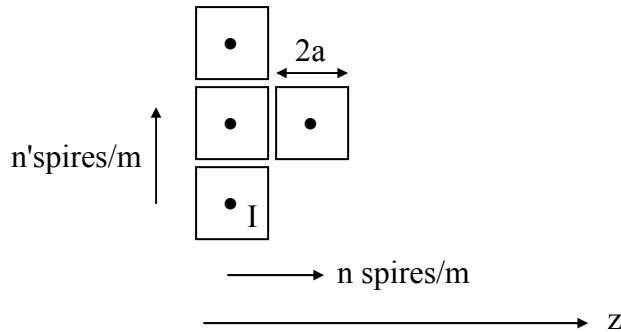
$$B_r(z,r) = 2 \gamma \delta r z^3 - \frac{3}{2} \gamma \delta r^3 z$$

On se demande bien cependant quel est l'intérêt d'un tel calcul !!

8) Pour le solénoïde, le champ ne sera uniforme que sur une longueur $h \ll l = 8 \text{ m}$.

Alors : $B = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right) I$ pour une couche de fil $\Rightarrow N = \frac{Bl}{\mu_0 I} = 3,3 \times 10^4$ spires !

Ce résultat aberrant incite à utiliser plusieurs couches (car $N \times 2a > l \dots$).



Alors : $B = \frac{\mu_0 N N' I}{l}$

En supposant les spires accolées, carrées de côté $2a$:

$$N = \frac{l}{2a} \Rightarrow N' = \frac{B \times 2a}{\mu_0 I} = \frac{25}{\Pi} \approx 8 \text{ et } N = \frac{l}{2a} \approx 4 \times 10^3$$

On a alors besoin de 8 couches comportant chacune 4000 spires, soit 32000 spires. La longueur totale de fil conducteur nécessaire est :

$$L = N N' \times \Pi D = 384 \text{ km !}$$

9) * D'après la question 5), il faut réaliser :

$$\frac{144}{125} \left(\frac{z}{R} \right)^4 < 0,02 \Rightarrow |z| < 0,36 R$$

Soit : $H = 0,72 R$

A.N. : $R \approx 1,4 H \approx 5,6 \text{ m}$

* Alors : $B(O) = \gamma = \frac{\mu_0 N I}{R} \frac{8}{5\sqrt{5}} \Rightarrow N = \frac{5\sqrt{5} R B(O)}{8 \mu_0 I}$

A.N. : $N = 3,1 \times 10^4$ spires

* Puis $L = N \times 2 \Pi R = 1100 \text{ km}$

10) La solution la plus économique est le solénoïde.

Enoncé en fin de document.

Alors :
$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{4a^2} \Rightarrow P_J = RI^2 = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{4a^2} I^2$$

A.N. : $P_J = 16 \text{ MW}$!

Il faut utiliser un matériau supraconducteur pour limiter les pertes Joule.

I.B) Champ linéaire : bobines de Mholtzhel

11) Toujours en posant $f(u) = \frac{NB(o)}{(1+u^2)^{3/2}}$, on a désormais, si $h(u)$ est le champ créé en un point P par les bobines de Mholtzhel :

$$h(u) = -f\left(u + \frac{d}{R}\right) + f\left(u - \frac{d}{R}\right) \text{ avec cette fois : } \frac{d}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc :

$$h(u) = \frac{\mu_0 NI}{2R} - \left(1 + \left(u + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{-3/2} + \left(1 + \left(u - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{-3/2}$$

12) Au voisinage de $u = 0$:

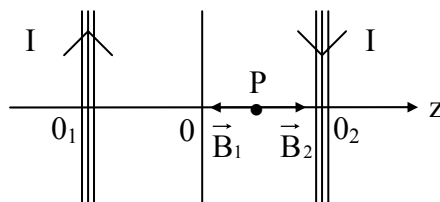
$$h(u) \approx \frac{\mu_0 NI}{2R} \frac{8\sqrt{3}}{49} \left(+ \frac{12\sqrt{3}}{7} u \right) \text{ à des termes en } u^5 \text{ près}$$

Soit :
$$h(u) \approx + \frac{\mu_0 NI}{R} \frac{48\sqrt{3}}{49\sqrt{7}} u = (aR)u$$

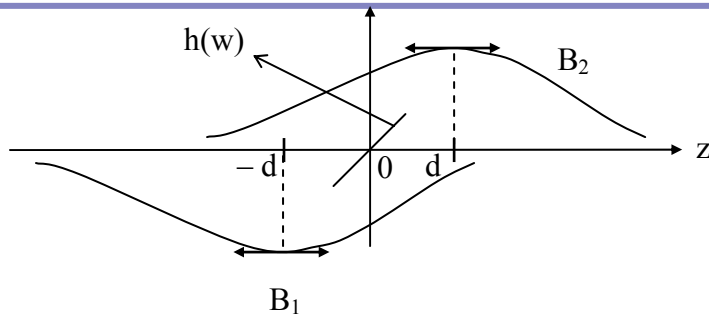
Avec :

$$a = + \frac{\mu_0 NI}{R^2} \frac{48}{49} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Rem. : Pour $z > 0$, on voit que \vec{B}_1 et \vec{B}_2 sont de sens opposés en P, avec $\|\vec{B}_1\| < \|\vec{B}_2\|$, de sorte que $h(u) > 0$ pour $u > 0$:



Énoncé en fin de document.



13) En prenant en compte le terme en u^5 :

$$h(u) \approx \frac{\mu_0 NI}{2R} \frac{8\sqrt{7}}{49} \left[\frac{12\sqrt{3}}{7} u - \frac{2112}{2401} u^5 \right]$$

Pour approximer $h(u)$ par l'expression précédente à mieux que 2 % près, il faut donc réaliser :

$$\frac{2112}{2401} \frac{7}{12\sqrt{3}} u^4 < 0,02$$

Soit : $|u| < 0,51$

14) A.N. :

$$N = \frac{aR^2}{\mu_0 I} \frac{49}{48} \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1,25 \times 10^4 \text{ spires}$$

II – L'EXPERIENCE DE STERN ET GERLACH

15) Les atomes de lithium possèdent une énergie d'agitation thermique :

$$E_{C_0} = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow T = \frac{2 E_{C_0}}{3 k_B}$$

A.N. : $T \approx 770 \text{ K}$ (valeur « raisonnable » pour une valeur de lithium, à savoir supérieure à T_{vap}).

16)* La force dérive de l'énergie potentielle E_p .

Or :

$$E_p = -m_z B(z) \Rightarrow \vec{F} = -\frac{dE_p}{dz} \vec{e}_z = m_z \frac{dB_z}{dz} \vec{u}_z$$

Avec $B_z(z) = az$:

$$\vec{F} = am_z \vec{u}_z$$

* La force précédente est constante, la trajectoire est donc parabolique :