Mines PC II/PSI II – 2008

Enoncé en fin de document.

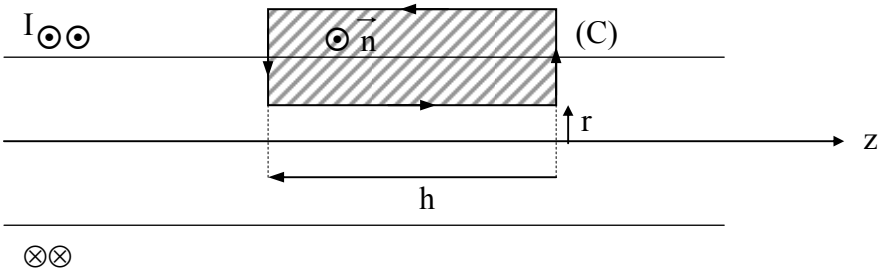
Mines PC II/ PSI II 2008

DISPOSITIF MAGNETIQUE

I – CREATION DE CHAMPS MAGNETIQUES AYANT DES PROPRIETES PARTICULIERES

I.A) Champ uniforme : solénoïdes et bobines de Helmholtz

1) Solénoïde « infini » (l >> R)



*Symétrie : la distribution de courants est invariante dans toute translation selon 0z : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = \vec{0}$, et dans toute rotation autour de 0z : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = \vec{0}$.

Par ailleurs, tout plan perpendiculaire à 0z est plan de symétrie pour les courants : $\vec{B}$, pseudo-vecteur, lui est orthogonal : $\vec{B}$ // 0z. Finalement :

$$\boxed{\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_z}$$

* $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$: on peut le justifier en considérant le solénoïde infini comme la limite d'un tore de rayon moyen R $\to \infty$. Pour le tore, le théorème d'Ampère donne trivialement $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$.

* On applique alors le théorème d'Ampère au contour rectangulaire orienté (C) :

$$\underbrace{\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl}}_{O + O + O + B(r)h} = \mu_0 \, « \underbrace{I_{enlacée}}_{Ih \; (n = \frac{N}{l})} »$$

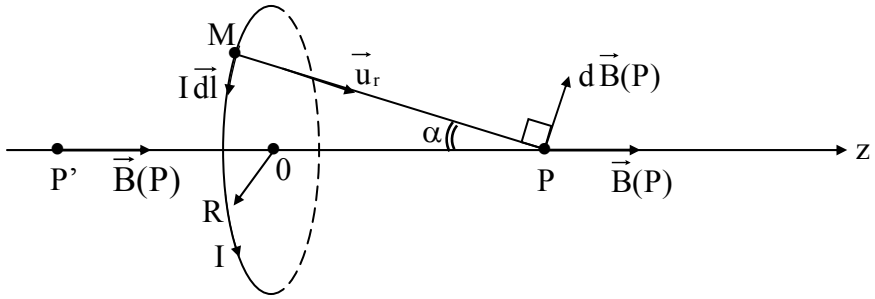
Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z & r < R \\ \vec{B} = \vec{0} & r > R \end{cases}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

2) Spire circulaire



* Symétrie : tout plan contenant 0z est plan d'antisymétrie pour la distribution de courants, donc $\vec{B}(P) = B(z)\,\vec{e}_z$.

Le plan de la spire est plan de symétrie, donc $\vec{B}(P') = \vec{B}(P)$: $B(-z) = B(z)$.

* On calcule $\vec{B}$ par Biot et Savart :

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\Pi} I \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

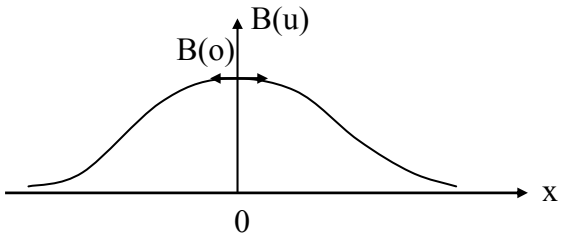
$$dB_z(P) = \frac{\mu_0}{4\Pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha$$

D'où : $$B(z) = \oint_{spire} \frac{\mu_0}{4\Pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\Pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} \times 2\Pi R \quad \text{avec } \sin\alpha = \frac{R}{r}$$

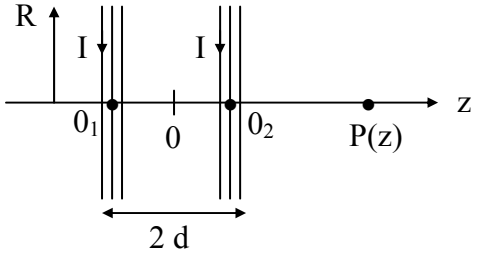
Soit : $$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^2} = \frac{\mu I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Finalement :

$$B(u) = B(o).\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \quad \begin{cases} u = \dfrac{z}{R} \\ B(o) = \dfrac{\mu_0 I}{2R} \end{cases}$$



3) Bobines de Helmholtz



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

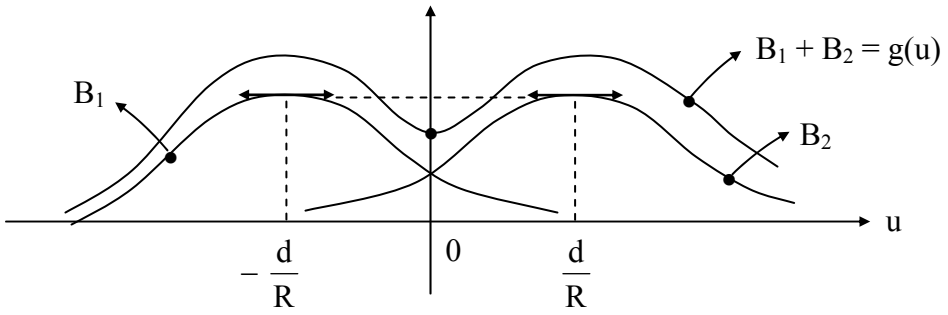
Enoncé en fin de document.

Soit $f(u) = \dfrac{NB(o)}{(1+u^2)^{3/2}}$ le champ créé en P par une bobine centrée en 0, et g(u) le champ créé par les bobines de Helmholtz. Alors :

$$g(u) = \underbrace{f\left(u + \frac{d}{R}\right)}_{B_1} + \underbrace{f\left(u - \frac{d}{R}\right)}_{B_2}$$

Ainsi :

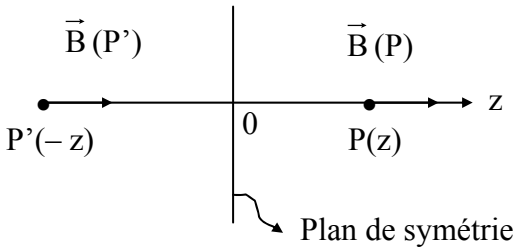
$$\boxed{g(u) = \frac{\mu_0 NI}{2R}\left[\frac{1}{\left[1+\left(u+\frac{d}{R}\right)^2\right]^{2/3}} + \frac{1}{\left[1+\left(u-\frac{d}{R}\right)^2\right]^{2/3}}\right]}$$



Rem. : la courbe ci-dessus est tracée dans le cas général. Pour $d = \dfrac{R}{2}$, le champ g(u) est quasi uniforme entre 0_1 et 0_2.

4) * Le plan 0xy est plan de symétrie pour la distribution de courants.

Donc : $\vec{B}(P') = -S(\vec{B}(P))$



Soit : $\boxed{B(-z) = B(z)}$

* On a, au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} \left(1+\left(u+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3/2} \approx \frac{8}{5\sqrt{5}}\left[1 - \frac{6u}{5} + \frac{32}{25}u^3 - \frac{144}{125}u^4\right] \\ \left(1+\left(u-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3/2} \approx \frac{8}{5\sqrt{5}}\left[1 + \frac{6u}{5} - \frac{32}{25}u^3 - \frac{144}{125}u^4\right] \end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Ainsi : $$\boxed{\tilde{g}(u) = g(o)\left[1 - \frac{144}{125}u^4\right]}$$

Avec : $$\boxed{g(o) = \frac{\mu_0 NI}{R}\frac{8}{5\sqrt{5}} = \gamma}$$

5) $\tilde{g}(u)$ = cste à mieux que 2 % près si :

$$\frac{144}{125}u^4 < 0{,}02 \Rightarrow \underline{|u| < 0{,}36}$$

6) * La distribution de courant est invariante dans toute rotation autour de 0z : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = \vec{0}$.

* Tout plan contenant 0z est plan d'antisymétrie pour les courants : $B_\theta = 0$. Ainsi :

$\vec{B}$	$B_r(r,z)$
	0
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$	$B_z(r,z)$

7) On a : $$B_z(r,z) \approx \tilde{g}(z) + \alpha r^2 \tilde{g}''(z) + \beta(r)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent, pour le champ (en régime permanent) :

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{B} = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

On en déduit : $$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -\tilde{g}'(z) + \alpha r^2 \tilde{g}^{(3)}(z) \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} = 2\alpha r \tilde{g}''(z) + \beta'(r) \end{cases}$$

Ou encore : $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -r\tilde{g}'(z) - \alpha r^3 \tilde{g}^{(3)}(z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(rB_r) = 2\alpha r^2 \tilde{g}''(z) + r\beta'(r) \end{cases}$$

D'après le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial z}(rB_r)\right)$$

D'où : $$-r\tilde{g}''(z) - \alpha r^3 \tilde{g}^{(4)}(z) = 4\alpha r \tilde{g}''(z) + \beta'(r) + r\beta''(r)$$

$$\Rightarrow (4\alpha + 1) r\tilde{g}''(z) = -\alpha r^3 \tilde{g}^{(4)}(z) - \beta'(r) - r\beta''(r)$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Avec : $\begin{cases} \tilde{g}(z) = \gamma(1 - \delta z^4) \quad \text{si } \delta = \dfrac{144}{125} \cdot \dfrac{1}{R^4} \\ \tilde{g}\,'(z) = -4\gamma\delta z^3 \\ \tilde{g}\,''(z) = -12\gamma\delta z^2 \\ \tilde{g}^{(3)}(z) = -24\gamma\delta z \\ \tilde{g}^{(4)}(z) = -24\gamma\delta \end{cases}$

On obtient donc :

$$\underbrace{-12\gamma\delta z^2(4\alpha + 1)}_{F(z)} = \underbrace{24\gamma\delta\alpha r^2 - \frac{\beta'/r}{r} - \beta''/r}_{G(r)} \Rightarrow \begin{cases} F(z) = \text{cste} = 0 : \boxed{\alpha = -\frac{1}{4}} \\ G(r) = \text{cste} \end{cases}$$

On a alors : $G(r) = 0 \Rightarrow r\beta''(r) + \beta'(r) + 6\gamma\delta r^3 = 0$

Soit : $\dfrac{d}{dr}(r\beta'(r)) = -6\gamma\delta r^3 \Rightarrow r\beta'(r) = -\dfrac{3}{2}\gamma\delta r^4 + C$

Comme $\beta(0)$ est définie : $C = O$

D'où : $\beta'(r) = -\dfrac{3}{2}\gamma\delta r^3$

Et finalement : $\boxed{\beta(r) = -\dfrac{3}{8}\gamma\delta r^4 + O}$ $\quad (\beta(o) = 0 \text{ car } B_z(0,z) = \tilde{g}(z))$

On tire alors : $\boxed{B_z(r,z) = \gamma(1 - \delta z^4) + 3\gamma\delta r^2 z^2 - \dfrac{3}{8}\gamma\delta r^4}$

Puis : $\begin{cases} \dfrac{\partial B_r}{\partial z} = \dfrac{\partial B_z}{\partial r} = 6\gamma\delta r z^2 - \dfrac{3}{2}\gamma\delta r^3 & (1) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -r\dfrac{\partial B_z}{\partial r} = +4\gamma\delta r^3 - 6\gamma\delta r^3 z & (2) \end{cases}$

De (1), on tire : $B_r(r,z) = 2\gamma\delta r z^3 - \dfrac{3}{2}\gamma\delta r^3 z + F(r)$

Donc : $\dfrac{\partial}{\partial r}(rB_r) = 4\gamma\delta r z - 6\gamma\delta r^3 z + \dfrac{d}{dr}(rF(r))$

D'après (2), on a alors : $\dfrac{d}{dr}(rF(r)) = 0 : F(r) = \dfrac{C}{r}$

Mais, comme B_r est bornée sur l'axe : $C = O$

Rem. : On peut aussi invoquer que $B_r(r = o,z) = 0 \Rightarrow F(r) = 0$ (ce qui évite d'utiliser l'équation (2)).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

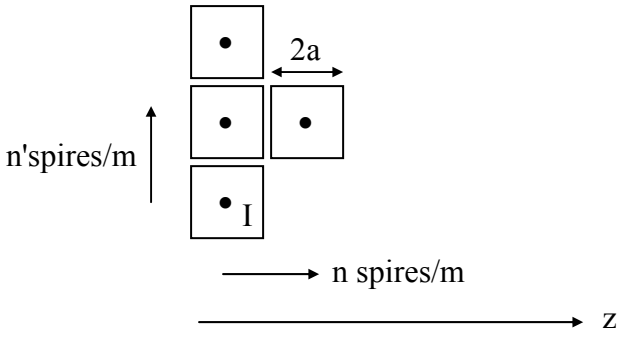
Au final : $\boxed{B_r(z,r) = 2\,\gamma\delta r z^3 - \frac{3}{2}\,\gamma\delta r^3 z}$

On se demande bien cependant quel est l'intérêt d'un tel calcul !!

8) Pour le solénoïde, le champ ne sera uniforme que sur une longueur $h << l = 8$ m.

Alors : $B = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right) I$ pour une couche de fil $\Rightarrow$ $N = \frac{Bl}{\mu_0 I} = 3{,}3 \times 10^4$ spires !

Ce résultat aberrant incite à utiliser plusieurs couches (car $N \times 2a > l$ …).



Alors : $B = \frac{\mu_0 NN'I}{l}$

En supposant les spires accolées, carrées de côté 2a :

$$N = \frac{l}{2a} \Rightarrow N' = \frac{B \times 2a}{\mu_0 I} = \frac{25}{\Pi} \approx 8 \text{ et } N = \frac{l}{2a} \approx 4\,10^3$$

On a alors besoin de 8 couches comportant chacune 4000 spires, soit 32000 spires. La longueur totale de fil conducteur nécessaire est :

$$\boxed{L = NN' \times \Pi D = 384 \text{ km !}}$$

9) * D'après la question 5), il faut réaliser :

$$\frac{144}{125}\left(\frac{z}{R}\right)^4 < 0{,}02 \Rightarrow |z| < 0{,}36\,R$$

Soit : $\boxed{H = 0{,}72\,R}$

A.N. : $\underline{R \approx 1{,}4\,H \approx 5{,}6 \text{ m}}$

* Alors : $B(O) = \gamma = \frac{\mu_0 NI}{R}\frac{8}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{N = \frac{5\sqrt{5}\,RB(O)}{8\,\mu_0 I}}$

A.N. : $N = 3{,}1 \times 10^4$ spires

* Puis $\underline{L = N\,2\,\Pi R = 1100 \text{ km}}$

10) La solution la plus économique est le solénoïde.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Alors : $$R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{4a^2} \Rightarrow \boxed{P_J = RI^2 = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{4a^2}I^2}$$

A.N. : $\underline{P_J = 16\,MW}$!

Il faut utiliser un matériau supraconducteur pour limiter les pertes Joule.

I.B) Champ linéaire : bobines de Mholtzhel

11) Toujours en posant $f(u) = \frac{NB(o)}{(1+u^2)^{3/2}}$, on a désormais, si h(u) est le champ créé en un point P par les bobines de Mholtzhel :

$$h(u) = -f\left(u + \frac{d}{R}\right) + f\left(u - \frac{d}{R}\right) \text{ avec cette fois : } \frac{d}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc : $$\boxed{h(u) = \frac{\mu_0 NI}{2R}\left(-\left(1+\left(u+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{-3/2} + \left(1+\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{-3/2}\right)}$$

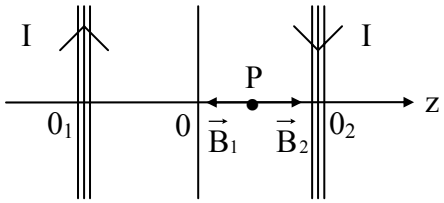
12) Au voisinage de u = 0 :

$$h(u) \approx \frac{\mu_0 NI}{2R}\frac{8\sqrt{3}}{49}\left(+\frac{12\sqrt{3}}{7}u\right) \quad \text{à des termes en } u^5 \text{ près}$$

Soit : $$h(u) \approx +\frac{\mu_0 NI}{R}\frac{48\sqrt{3}}{49\sqrt{7}}u = (aR)u$$

Avec : $$\boxed{a = +\frac{\mu_0 NI}{R^2}\frac{48}{49}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$$

Rem. : Pour z > 0, on voit que $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont de sens opposés en P, avec $\|\vec{B}_1\| < \|\vec{B}_2\|$, de sorte que h(u) > 0 pour u > 0 :

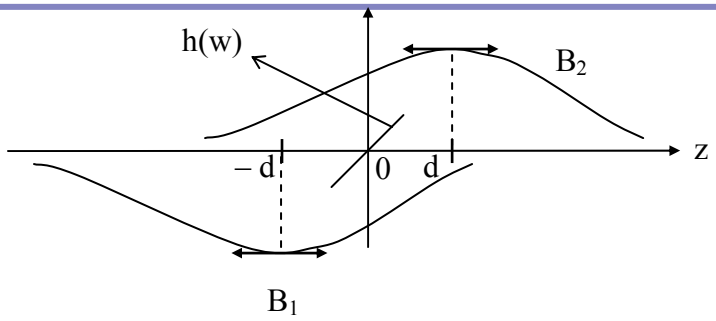


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Mines PC II/PSI II – 2008

Enoncé en fin de document.



13) En prenant en compte le terme en u^5 :

$$h(u) \approx \frac{\mu_0 NI}{2R}\,\frac{8\sqrt{7}}{49}\left[\frac{12\sqrt{3}}{7}u - \frac{2112}{2401}u^5\right]$$

Pour approximer h(u) par l'expression précédente à mieux que 2 % près, il faut donc réaliser :

$$\frac{2112}{2401}\,\frac{7}{12\sqrt{3}}\,u^4 < 0{,}02$$

Soit : $|u| < 0{,}51$

14) ***A.N.*** :

$$\boxed{N = \frac{aR^2}{\mu_0 I}\,\frac{49}{48}\,\sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}25 \text{ x } 10^4 \text{spires}}$$

II – L'EXPERIENCE DE STERN ET GERLACH

15) Les atomes de lithium possèdent une énergie d'agitation thermique :

$$E_{C_0} = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow \boxed{T = \frac{2E_{C_0}}{3k_B}}$$

A.N. : $\boxed{T \approx 770 \text{ K}}$ (valeur « raisonnable » pour une valeur de lithium, à savoir supérieure à T_{vap}).

16) * La force dérive de l'énergie potentielle E_P.

Or : $$E_P = -m_z B(z) \Rightarrow \vec{F} = -\frac{dE_P}{dz}\vec{e}_z = m_z\frac{dB_z}{dz}\vec{u}_z$$

Avec $B_z(z) = az$: $\boxed{\vec{F} = am_z\vec{u}_z}$

* La force précédente est constante, la trajectoire est donc parabolique :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.