Mines PSI II – 2008

Enoncé en fin de document.

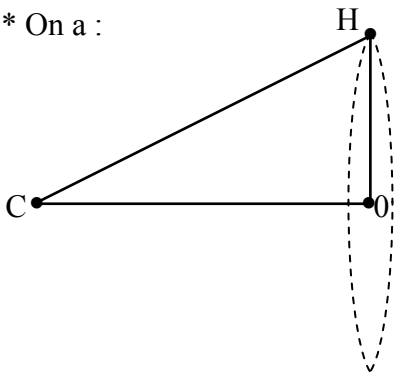
Mines PSI I 2008

MODELISATION DES DUNES DE SABLE

I) Collisions sans perte d'énergie : modèle de Hertz

1) * Comme $[\delta] = a$, on a trivialement : $[P] = [\varepsilon]$

* On a :



$$\begin{cases} CH = R \\ OH = \dfrac{a}{2} \text{ et } CH^2 = OH^2 + OC^2 \\ OC = R - \delta \end{cases}$$

D'où : $$R^2 = \frac{a^2}{4} + (R-\delta)^2 = \frac{a^2}{4} + R^2 + \delta^2 - 2R\delta$$

Au 1er ordre en δ/R, on a donc : $O \approx \dfrac{a^2}{4} - 2R\delta$, soit :

$$\boxed{a \approx 2\sqrt{2R\delta}}$$

2) * Le module de la force de déformation s'écrit : $F_{de} = \varepsilon\, 4\, \Pi\, a\, \delta$

Soit, compte tenu du résultat précédent :

$$\boxed{F_{de} \approx = \varepsilon\, 8\, \Pi\, \sqrt{2}\; R^{1/2}\delta^{3/2}}$$

* On a : $\vec{F}_{de}(\delta) = -\dfrac{dE_p}{d\delta}\vec{x} = -F_{de}\vec{x}$, si on considère $\vec{F}_{de} = \vec{F}_{2\to 1}$, et $\vec{x} = \dfrac{\overrightarrow{O_1O_2}}{O_1O_2}$

Ainsi : $$F_{de} = \varepsilon\, 8\, \Pi\, \sqrt{2}\; R^{1/2}\delta^{3/2} = \frac{dE_p}{d\delta} \Rightarrow E_p(\delta) = \varepsilon\, \frac{16\,\Pi\sqrt{2}}{S}\, R^{1/2}\delta^{5/2} + \text{cste}$$

Soit : $$\boxed{E_p(\delta) = \varepsilon\, \frac{16\,\Pi\sqrt{2}}{S}\, R^{1/2}\delta^{3/2}}$$ avec le choix arbitraire $E_p(\delta = 0) = 0$

3) * On a trivialement : $x_2 - x_1 = 2R - 2\delta$

* Alors : $\overset{o}{x}_2 - \overset{o}{x}_1 = -2\overset{o}{\delta}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Or, pendant la collision : $\overset{o}{x}_2 = -\overset{o}{x}_1$, de sorte que : $\boxed{\overset{o}{x}_1 = \overset{o}{\delta}}$

4) Pendant le choc : $E_c = 2\ E_{c_1} = m\overset{o}{\delta}^2$

Donc : $\boxed{E_m = E_c + E_p = m\overset{o}{\delta}^2 + \varepsilon' R^{1/2}\delta^{5/2}}$ $\quad (\varepsilon' = \dfrac{16\,\Pi\sqrt{2}}{S}\ \varepsilon)$

5) * Le système des 2 billes est isolé en référentiel galiléen : il y a conservation de $\vec{P}$ de l'ensemble.

* Ainsi : $\underbrace{\vec{O}}_{\text{avant}} = \underbrace{m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2}_{\text{après}}$

$(\vec{v}_2 = -\vec{v}_1)$

Donc : $\boxed{\vec{w}_2 = -\vec{w}_1}$

6) Il y a de même conservation de l'énergie mécanique, donc ici de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{mv_1^2}_{\text{avant}} = \underbrace{mw_1^2}_{\text{après}} \Rightarrow \boxed{v_1 = v = w_1 = w}$$

7) Toujours par conservation de l'énergie mécanique totale :

$$\underbrace{mv^2 + \underbrace{E_p(\delta = 0)}_{0}}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{m\overset{o}{\delta}^2 + \varepsilon' R^{1/2}\delta^{5/2}}_{\text{pendant le choc}}$$

La valeur maximale de δ correspond à $\overset{o}{\delta} = 0$, d'où : $mv^2 = \varepsilon' R^{1/2}\delta_m^{5/2}$

Soit : $\rho_b \dfrac{4}{3}\,\Pi R^3 v^2 = \dfrac{16\,\Pi\sqrt{2}}{5}\,\varepsilon R^{1/2}\delta^{5/2} \Rightarrow \boxed{\delta_m = R\left[\dfrac{5}{12\sqrt{2}}\dfrac{\rho_b v^2}{\varepsilon}\right]^{2/5}}$

Donc $u_m = \dfrac{\delta_m}{R}$ ne dépend que de la nature des billes (ρ_b,ε) et de leur vitesse v avant le choc.

8) On peut écrire l'intégrale 1ère de l'énergie sous la forme :

$$m\overset{o}{\delta}^2 = \varepsilon' R^{1/2}(\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2})$$

Soit, par séparation des variables :

$$\frac{d\delta}{[\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2}]^{1/2}} = \pm\left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} dt$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Par « symétrie temporelle », on peut se limiter la phase où δ augmente (i.e. pendant la durée $\frac{\tau}{2}$) : $\overset{o}{\delta} > 0$

Ainsi : $$\int_{\delta=0}^{\delta_m} \frac{dS}{[\delta_m{}^{5/2} - \delta^{5/2}]^{1/2}} = + \left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} dt \int_0^{\tau/2} dt$$

En posant $x = \frac{\delta}{\delta_m}$, on tire :

$$\underbrace{\int_{x=0}^{1} \frac{\delta_m}{\delta_m{}^{5/2}} \frac{dx}{[1 - x^{5/2}]^{1/2}}}_{\delta_m{}^{-1/4} I} = \left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} \frac{\tau}{2}$$

Ainsi : $\boxed{\tau = 2 \left[\frac{m}{\varepsilon' \sqrt{R \delta_m}}\right]^{1/2} I}$ ou encore en introduisant v : $\boxed{\tau = 2 \left[\frac{m^2}{\varepsilon'^2 Rv}\right]^{1/5} I}$

Rem. : $[\tau^5] = \left[\frac{m^2}{\varepsilon'^2 Rv}\right] = \left[\frac{m^2}{F^2 R^3 v}\right] = \left[\frac{m^2}{\left(\frac{mv}{\tau}\right)^2 R^3 v}\right] = \left[\frac{\tau^2}{R^3 v^3}\right]$ car $[\varepsilon'] = \left[\frac{F}{R^2}\right]$

ce qui assure l'homogénéité de l'expression obtenue pour τ.

9) ***A.N.*** : $\varepsilon' = 9{,}85 \times 10^{10}$Pa

* $R = 10^{-4}$; $m = 1{,}05 \times 10^{-8}$kg $\quad \begin{cases} \tau = 3{,}8 \times 10^{-7}\text{s} \\ u_m = \left(\frac{mv^2}{\varepsilon' R^3}\right)^{2/5} = 3{,}9\ 10^{-4} \end{cases}$

* $R' = 10^{-3}\text{m} = 10\ R$; $m' = 10^3 m$ $\quad \begin{cases} \tau' = 10\ t = 3{,}8 \times 10^{-6}\text{s} \\ u'_m = u_m \end{cases}$

II – Collisions avec perte d'énergie

10) Le système des deux billes est isolé ; l'étude se fait en référentiel galiléen : il y a conservation de la quantité de mouvement du système.

11) On a donc : $\begin{cases} mv_1 + mv_2 = mw_1 + mw_2 \\ w_2 - w_1 = -e(v_2 - v_1) \end{cases}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

D'où l'on tire : $\begin{cases} w_1 = \dfrac{v_1(1-e)+v_2(1+e)}{2} \\ w_2 = \dfrac{v_1(1+e)+v_2(1-e)}{2} \end{cases}$

* Avant le choc : $E_c = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$

* Après le choc : $E'_c = \frac{1}{2} m w_1^2 + \frac{1}{2} m w_2^2$

Donc : $\Delta E_c = E'_c - E_c = \frac{1}{2} m [w_1^2 + w_2^2 - v_1^2 - v_2^2]$

Avec : $w_1^2 + w_2 = \dfrac{(v_1^2 + v_2^2)(1+e^2) + 2 v_1 v_2 (1-e^2)}{2}$

D'où : $\Delta E_c = \frac{1}{4} m [(v_1^2 + v_2^2)(e^2 - 1) + 2 v_1 v_2 (1 - e^2)]$

Soit finalement : $\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{4} m (1 - e^2)(v_1 - v_2)^2 \leq 0}$

(pour un choc élastique, $e = 1$ et $\Delta E_c = 0$).

12) Pour un choc de plein fouet : $v_1 = -v_2 = v$, donc : $\boxed{\Delta E_c = -m(1 - e^2) v^2}$

13) * $\left[\overset{o}{\delta} \dfrac{\partial F_{de}}{\partial \delta}\right] = \left[\dfrac{F}{\tau}\right] = \left[\dfrac{F_d}{A}\right]$, de sorte que A est homogène à un temps

* Avec $F_{de} = \varepsilon\, 8\, \Pi \sqrt{2}\, R^{1/2} \delta^{3/2}$: $\dfrac{\partial F_{de}}{\partial \delta} = \varepsilon\, 12\, \Pi \sqrt{2}\, R^{1/2} \delta^{1/2}$

Ainsi : $\underline{F_d = A \overset{o}{\delta} \varepsilon\, 12\, \Pi \sqrt{2}\, R^{1/2} \delta^{1/2}}$ (pour $\overset{o}{\delta} > 0$)

* L'énergie dissipée au cours de la collision (définie positivement) est donc :

$$\boxed{U_d = 2 \underbrace{\left[2 \int_{\delta=0}^{\delta_m} F_d \, dS\right]}_{\text{pour une bille}}}$$

14) Si $U_d = |\Delta E_c|$ est faible devant E_c, on peut encore utiliser l'intégrale première de l'énergie de la question 7 :

$$m v^2 \approx m \overset{o}{\delta}^2 + \varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2} \Rightarrow \overset{o}{\delta}^2 = v^2 \left[1 - \frac{\varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2}}{m v^2}\right] \quad (\text{avec } \varepsilon' = \frac{16 \Pi \sqrt{2}}{5} \varepsilon)$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Avec toujours : $mv^2 = \varepsilon' R^{1/2} \delta_m^{5/2}$

D'où : $m\overset{o}{\delta}^2 = \varepsilon' R^{1/2}(\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2})$ (cf question 8) directement…)

Soit : $\boxed{m\overset{o}{\delta}^2 = \varepsilon' R^{1/2} \delta_m^{5/2}(1 - y^{5/2})}$ si $y = \dfrac{\delta}{\delta_m}$

15) On a alors : $F_d = \left(\dfrac{A\,\varepsilon\, 12\,\Pi\sqrt{2}\, R^{1/2}\delta^{1/2}}{m^{1/2}} \right) (\varepsilon'^{1/2} R^{1/4} \delta_m^{5/4}(1 - y^{5/2})^{1/2})$

Soit : $F_d = \dfrac{A\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon'}\, 12\,\Pi\sqrt{2}\, R^{3/4}\delta_m^{7/4}}{m^{1/2}} \sqrt{y(1 - y^{5/2})}$

Puis : $U_d = 4 \int_{y=0}^{1} F_d\, \delta_m dy$

Soit : $\boxed{U_d = \dfrac{48\,\Pi\sqrt{2}\,\varepsilon\varepsilon'^{1/2} A R^{3/4} \delta_m^{11/4}}{m^{1/2}} \int_{y=0}^{1} y\sqrt{(1 - y^{5/2})}\, dy}$

Comme v^2 est proportionnelle à $\delta_m^{5/2}$, on en déduit que U_d est proportionnelle à $v^{11/5}$:

$\boxed{\beta = \dfrac{11}{5}}$ (voisin de 2…)

Rem. : $[U_d^2] = \left[\dfrac{\varepsilon^3 A^2 R^7}{m} \right]$

Or : $[\varepsilon] = [FR^2] = \left[\dfrac{U}{R^3} \right]$

Donc : $[U_d^2] = \left[\dfrac{U^3 \tau^2}{mR^2} \right] = \left[U^2 \times \dfrac{U}{mR^2 w^2} \right] = [U^2]$, ce qui assure l'homogénéité de l'expression obtenue pour U_d.

16) On a : $U_d = mv^2(1 - e^2)$ proportionnelle à $v^{11/5}$, de sorte que $1 - e^2$ est proportionelle à $v^{1/5}$.

Or, pour $e \to 1$: $(1 - e^2) \approx 2(1 - e) = Kv^{1/5} \Rightarrow \boxed{1 - e = \dfrac{K}{2} v^{1/5}}$

17) * Le résultat précédent fournit en particulier : $\begin{cases} a \to 1 \\ v \to 0 \end{cases}$: aux faibles vitesses, les collisions tendent à devenir élastiques (très faible dissipation d'énergie).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.