X PC I 2008

ECHOGRAPHIE

Partie I : Propagation des ondes acoustiques

I.1) Equation locale de conservation de la masse :

$$\mathrm{div}(\rho\,\vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Soit, dans un cadre unidimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Avec $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ et $|\mu| << \rho_0$: $\begin{cases} \rho v \approx \rho_0 v \text{ au } 1^{er} \text{ ordre} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{\partial \mu}{\partial t} \end{cases}$

Ainsi : $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} \approx -\dfrac{\partial \mu}{\partial t}}$ (1)

I.2) En négligeant les effets de viscosité et de pesanteur, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P$$

Soit, dans le cadre unidimensionnel :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Avec : $\left|\dfrac{v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial v}}\right| \sim \dfrac{v^2/\lambda}{v/T} = -\dfrac{v}{C} << 1$

Et : $\rho\dfrac{\partial v}{\partial t} \approx \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t}$ au 1^{er} ordre

Ainsi : $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} \approx -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}}$ (2)

I.3) $X_S = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial P}{\partial P}\right)_{(S)} = \dfrac{1}{\rho_0 + \mu}\dfrac{\mu}{\Pi} \approx \dfrac{\mu}{\rho_0 \Pi} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\Pi}{\mu} \approx \dfrac{1}{\rho_0 X_S} = C^2}$ (3)

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

X PC I – 2008

Enoncé en fin de doument.

Rem. 1 : On peut poser a priori $\frac{\Pi}{\mu} = C^2$ par analyse dimensionnelle.

Rem. 2 : On peut aussi écrire :

$$\frac{d\rho}{\rho} = X_S dP \Rightarrow \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = X_S (P - P_0)$$

Soit : $$\ln\left(1+\frac{\mu}{\rho_0}\right) = X_S \Pi \approx \frac{\mu}{\rho_0}$$

Rem. 3 : Au 1er ordre : $X_S \Pi \approx X_{S_0} \Pi$

I.4) A l'aide de (1) et (3), on tire :

$$\rho_0 C^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Alors : $$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho_0 C^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$$ d'après (2)

Soit : $$\boxed{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0}$$

Avec : $$\boxed{C = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 X_S}}}$$

I.5) En calculant de même de deux manières $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}$, on obtient la même équation de D'Alembert sur v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t} = 0$$

I.6) Solution générale : $v(x,t) = \underbrace{V^+\left(t-\frac{x}{C}\right)}_{\text{OPP se propageant selon ox↗}} + \underbrace{V^-\left(t+\frac{x}{C}\right)}_{\text{OPP se propageant selon ox↘}}$

Alors, d'après (2) :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\rho_0\left[\overset{o}{V}^+\left(t-\frac{x}{C}\right) + \overset{o}{V}^-\left(t+\frac{x}{C}\right)\right] \Rightarrow \boxed{\Pi(x,t) = \rho_0 C\left[V^+\left(t-\frac{x}{C}\right) - V^-\left(t+\frac{x}{C}\right)\right] + 0}$$

I.7) Pour un GP, l'évolution isentropique se traduit par l'équation de Laplace :

$$P = \text{cste}\ \rho^\gamma \Rightarrow \frac{dP}{P} = \gamma\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \boxed{X_{S_0} = \frac{1}{\gamma P_0}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

D'où : $\boxed{C_{GP} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}}$

A.N. : $\boxed{C_{air} = 343\ ms^{-1}}$

I.8) Pour l'eau $\boxed{C_{eau} = 1480\ ms^{-1}}$

Partie II : Réflexion et transmission d'une onde sonore

II.1) Pour l'OPP se propageant selon ox croissant :

$\boxed{\Pi(x,t) = \rho_0 C v(x,t)} \Rightarrow \boxed{Z = \rho_0 C}$ d'après I.6) (impédance acoustique)

II.2) Au niveau de l'interface (ie $x \approx 0$), il y a continuité :

* de la vitesse, car il n'y a pas de mélange entre les deux fluides, et $\underline{S_1 = S_2}$ (si $S_1 \neq S_2$, il y a continuité du <u>débit volumique Sv</u>)

* de la surpression car : $\begin{cases} M \dfrac{d^2 v}{dt^2} = [P(0^-,t) - P0^+,t)]\ S \\ M \to 0 \end{cases}$

(On imagine la présence d'une paroi rigide de masse M à l'interface, $M \to 0$, cf. II.4).

II.3) * On a : $\begin{cases} v_i + v_r = v_t \\ Z_1(v_i - v_r) = Z_2 v_t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} r = \dfrac{v_r}{v_i} = \left(\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right) \\ t = \dfrac{v_t}{v_i} = \dfrac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases}}$ d'après I.6)

* Puis, si on définit : $\vec{\Pi}_a = \Pi \vec{v}$, vecteur de « Poynting acoustique » (vecteur de transport de l'énergie acoustique, en Wm^{-2}) :

$\Pi_a = \rho_0 C v^2$ pour une OPP, et : $\boxed{\begin{cases} R = \dfrac{<\Pi_{a_r}>}{<\Pi_{a_i}>} = r^2 = \left(\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \\ T = \dfrac{<\Pi_{a_t}>}{<\Pi_{a_i}>} = \dfrac{Z_2 t^2}{Z_1} = \dfrac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases}}$

II.4) En présence d'une paroi réelle de masse $M \neq 0$

* <u>Continuité de v</u> : $v(x = 0^-,t) = v(x = 0^+,t) = v_{paroi}$ ($\vec{v}_{fluide/paroi} = \vec{0}$, car il n'y a pas de débit entrant (ou sortant) de fluide dans (de) la paroi).

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

* Discontinuité de Π : $M\dfrac{dv}{dt}(x=0,t) = [P(0^-) - P(0^+)]\,S = [(\Pi_i + \Pi_r) - \Pi_t]\,S$

II.5) Pour une OPPH se propageant selon ox croissant, on obtient donc :

$$\begin{cases} \underline{A}_i + \underline{A}_r = \underline{A}_t \\ iMw\underline{A}_t = [Z_1(\underline{A}_i - \underline{A}_r) - Z_2\underline{A}_t]\,S \end{cases}$$

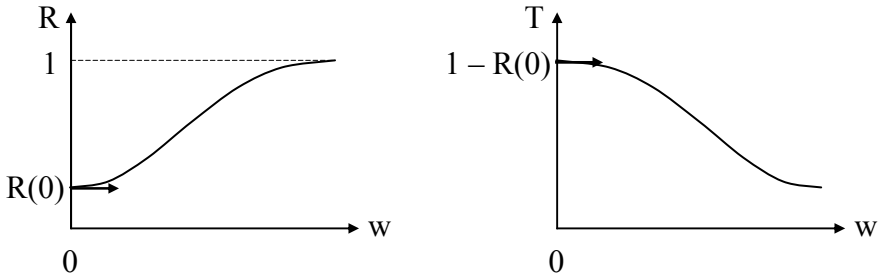
On en déduit : $\boxed{\underline{r} = \dfrac{\underline{A}_r}{\underline{A}_i} = \dfrac{Z_1 - \underline{Z}'_2}{Z_1 + \underline{Z}'_2} \text{ et } \underline{t} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + \underline{Z}'_2} \text{ si } \underline{Z}'_2 = Z_2 + iw\dfrac{M}{S}}$

Alors : $\begin{cases} <\Pi_{a_r}> = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\underline{\Pi}_r\,\underline{v}^*_r)\,,\ \underline{\Pi} = Z_1\underline{v}_r \\ \quad = \dfrac{1}{2}\,Z_1\left|\underline{A}_r\right|^2 \\ <\Pi_{a_i}> = \dfrac{1}{2}\,Z_1\left|\underline{A}_i\right|^2 \\ <\Pi_{a_t}> = \dfrac{1}{2}\,Z_2\left|\underline{A}_t\right|^2 \end{cases}$

Ainsi : $\boxed{R = \left|\underline{r}\right|^2 \text{ et } T = \dfrac{Z_2}{Z_1}\left|\underline{t}\right|^2}$

Soit : $\boxed{\begin{cases} R = \dfrac{(Z_1 - Z_2)^2 + \dfrac{M^2w^2}{S^2}}{(Z_1 + Z_2)^2 + \dfrac{M^2w^2}{S^2}} \\ T = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 + \dfrac{M^2w^2}{S^2}} = 1 - R \end{cases}}$

* Influence de w à M fixée :



La transmission du son est donc favorisée pour les basses fréquences : à travers une cloison, les sons paraissent plus graves : celle-ci se comporte comme un filtre passe-bas acoustique.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

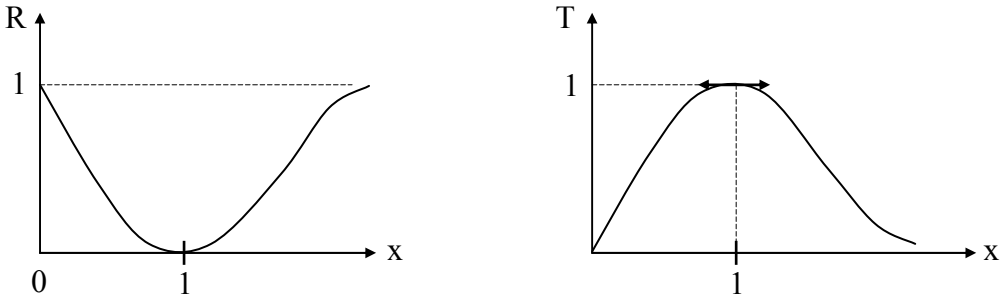
* Influence de M à w fixée

L'allure des graphes R(M) et T(M) à w fixée est la même que celle des graphes R(w) et T(w) à M fixée : aux fortes valeurs de M, il n'y a quasiment plus de vibrations de la cloison, et le son est alors totalement réfléchi.

Partie III : Principes de l'échographie

III.1) ***A.N.*** : $\boxed{Z = \rho_0 C = \sqrt{\frac{\rho_0}{X}} = 1{,}5\ 10^6\ \text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}}$

III.2) Si $x = \frac{Z_2}{Z_1}$: $\begin{cases} R(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \\ T(x) = \frac{4x}{(1+x)^2} \end{cases}$



On voit donc que la transmission d'une onde acoustique est favorisée si Z_1 et Z_2 sont de même ordre de grandeur.

* Air/peau : $Z_1 >> Z_2 \Rightarrow \begin{cases} T \approx 0{,}1\,\% \\ R \approx 99{,}9\,\% \end{cases}$: tout le signal émis est réfléchi par la peau.

* Gel/peau : si $Z_{gel} \approx 1{,}6\,10^6\,\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1} \approx Z_{peau}$, alors il y aura une bonne transmission (T voisin de 1).

* Pour un poumon, il y a de nombreux interfaces air/tissu, de sorte que le signal sera intégralement réfléchi et l'échographie impossible.

III.3) * Les zones blanches correspondent à une forte intensité réfléchie, donc Z_1 et Z_2 très différents : il s'agit donc du squelette du fœtus ($R_{muscle/squelette} \approx 41$ %).

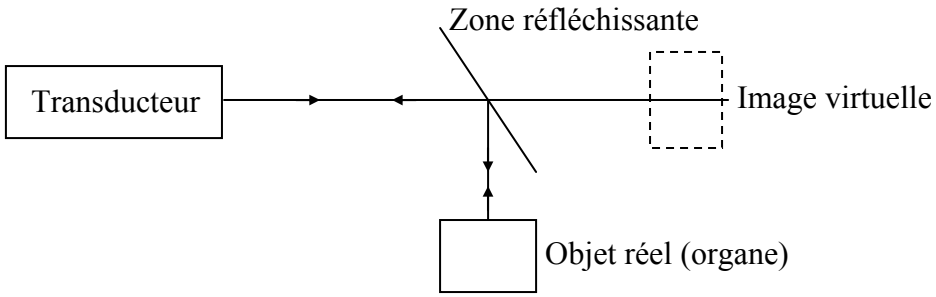
* La boite crânienne va réfléchir les ondes ultrasonores et donc empêcher la possibilité d'une échographie du cerveau.

* Les zones très réfléchissantes empêchent de visualiser ce qui se trouve derrière elles ; de plus, elles peuvent conduirent à une saturation du récepteur.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

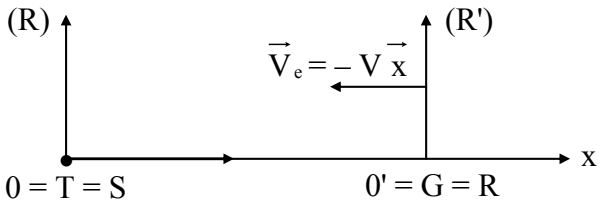
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

III.4) Une zone très réfléchissante se comporte comme un miroir acoustique qui donnera une image virtuelle de « l'objet » réel à étudier :



III.5.1) Effet Doppler longitudinal

* <u>A l'aller</u> : Source = transducteur fixe lié à (R)
Récepteur = globule mobile lié à (R')



Il y a invariance de la phase de l'onde entre (R) et (R') (principe de relatividé) : $\varphi = \varphi'$

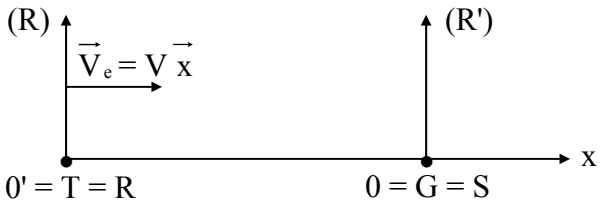
Soit, pour des ondes planes : $wt - kx = w't' - k'x'$ avec $\begin{cases} t' = t \\ x' = x + Vt \end{cases}$

D'où : $wt - kx = w't - k'(x + Vt) \Rightarrow \begin{cases} k' = k \\ w' = w + k'V = w + kV = w\left(1 + \dfrac{V}{C}\right) \end{cases}$

Donc : $\boxed{\nu' = \nu\left(1 + \dfrac{V}{C}\right) > \nu}$

Reçue Emise

* <u>Au retour</u> : Source = globule mobile lié à (R)
Récepteur = transducteur fixe lié à (R')



Cette fois : $\boxed{\nu' = \nu\left(1 - \dfrac{V}{C}\right)}$

Emise Reçue

Rem. : dans les 2 cas : $\nu_{reçue} > \nu_{émise}$ (décalage vers les aigus, ou le bleu).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

X PC I – 2008

Enoncé en fin de doument.

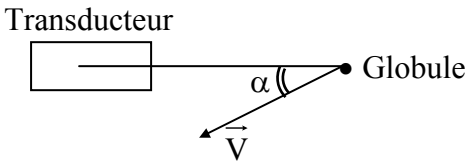
* Pour un aller-retour : $\begin{cases} \nu' = \nu_i \left(1+\dfrac{V}{C}\right) \\ \nu_r = \nu' \left(1-\dfrac{V}{C}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nu_r = \nu_i \left(\dfrac{1+\dfrac{V}{C}}{1-\dfrac{V}{C}}\right) \approx \nu_i \left(1+\dfrac{2V}{C}\right)}$

au 1er ordre en $\dfrac{V}{C}$

Ainsi : $\boxed{\nu_r - \nu_i \approx 2\,\dfrac{V}{C}\,\nu_i}$

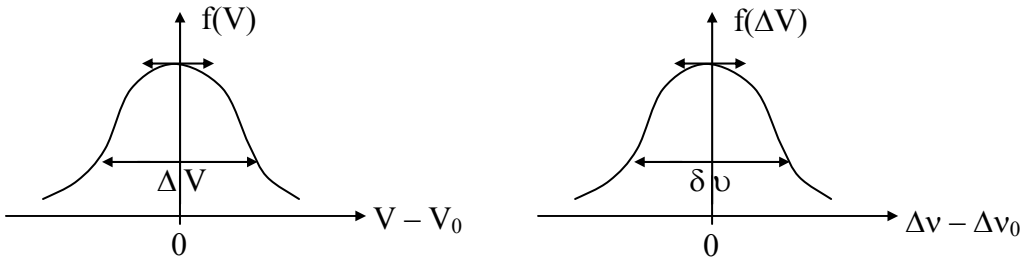
III.5.2) Dans le décalage Doppler, seule V_x intervient, donc il suffit de remplacer V par Vcosα :

$$\boxed{\nu_r - \nu_i \approx \frac{2\,V\cos\alpha}{\nu}\,\nu_i}$$



III.5.3) ***A.N.*** : $\boxed{V = \dfrac{C\Delta\nu}{2\,\nu_i} = 0{,}38\ \text{ms}^{-1}}$

III.3.4) La répartition des vitesses (gaussienne par exemple) provoque un élargissement du spectre (qui sera également gaussien).



$$\begin{cases} \Delta\nu_0 = \dfrac{2\,V_0}{2\,\nu_i}\,\nu_i \\ \delta\nu = 2\,\dfrac{\Delta V}{C}\,\nu_i \end{cases}$$

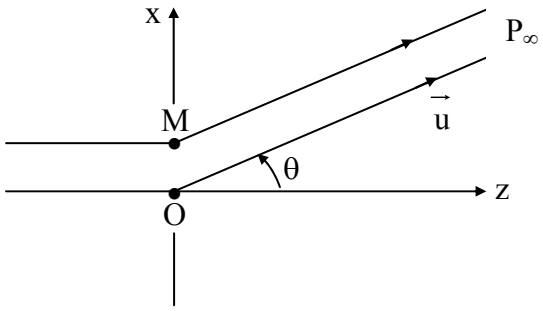
 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

X PC I – 2008

Enoncé en fin de doument.

Partie IV : Quelques aspects des techniques d'échographie

IV.1.1) Comme b >> a, toute l'intensité est diffractée dans le plan Oxz. Dans ce plan, l'intégrale de Fraunhofer s'écrit, sous incidence normale :



$$\underline{s} = \underline{cste} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{2i\Pi}{\lambda}\vec{u}.\overrightarrow{OM}} dx$$

($\underline{s}$ = amplitude complexe de l'onde de vitesse ou de surpression).

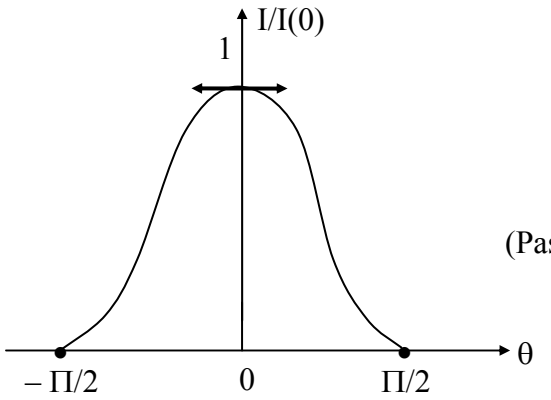
Soit : $\underline{s} = \underline{cste} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\Pi ux} = \underline{cste}\ a\,\mathrm{sinc}(\Pi ua)$ si $\boxed{u = \frac{\sin\theta}{\lambda}}$

Puis : $\boxed{I = \frac{1}{2}\ \underline{s}\,\underline{s}^* = I(0)\ \mathrm{sinc}^2(\Pi ua)}$

IV.1.2) ***A.N.*** : $\lambda = \frac{C}{\nu_0} = 4\ 10^{-4}\mathrm{m} = a$

On est donc juste à limite de validité de la théorie scalaire de la diffraction, basée sur le principe d'Huygens-Fresnel, à savoir : $\underline{a \geq \lambda.}$

L'allure du diagramme d'émission est alors la suivante :



(Pas de lobes secondaires)

IV.2.1) Il y a interférence constructive entre tous les transducteurs si :

$\varphi = m2\Pi$, φ déphasage entre 2 transducteurs consécutifs.

Or : $\delta = d\sin\theta$ d'après le théorème de Malus.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.