

ECHOGRAPHIE

Partie I : Propagation des ondes acoustiques

I.1) Equation locale de conservation de la masse :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Soit, dans un cadre unidimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Avec $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ et $|\mu| \ll \rho_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v \approx \rho_0 v \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ ordre} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} \approx - \frac{\partial \mu}{\partial t}} \quad (1)$$

I.2) En négligeant les effets de viscosité et de pesanteur, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{\mu}}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

Soit, dans le cadre unidimensionnel :

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Avec :

$$\left| \frac{v \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial t}} \right| \sim \frac{v^2 / \lambda}{v / T} = - \frac{v}{C} \ll 1$$

Et :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \approx \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

Ainsi :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \approx - \frac{\partial \Pi}{\partial x}} \quad (2)$$

I.3) $X_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial P} \right)_{(s)} = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \frac{\mu}{\Pi} \approx \frac{\mu}{\rho_0 \Pi} \Rightarrow \boxed{\frac{\Pi}{\mu} \approx \frac{1}{\rho_0 X_s} = C^2}$ (3)

Énoncé en fin de document.

Rem. 1 : On peut poser a priori $\frac{\Pi}{\mu} = C^2$ par analyse dimensionnelle.

Rem. 2 : On peut aussi écrire :

$$\frac{d\rho}{\rho} = X_S dP \Rightarrow \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = X_S (P - P_0)$$

Soit :

$$\ln\left(1 + \frac{\mu}{\rho_0}\right) = X_S \Pi \approx \frac{\mu}{\rho_0}$$

Rem. 3 : Au 1^{er} ordre : $X_S \Pi \approx X_{S_0} \Pi$

I.4) A l'aide de (1) et (3), on tire :

$$\rho_0 C^2 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = - \frac{1}{\rho_0 C^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \quad \text{d'après (2)}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0$$

Avec :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 X_S}}$$

I.5) En calculant de même de deux manières $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}$, on obtient la même équation de D'Alembert sur v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

I.6) Solution générale : $v(x,t) = \underbrace{V^+\left(t - \frac{x}{C}\right)}_{\text{OPP se propageant selon } ox \nearrow} + \underbrace{V^-\left(t + \frac{x}{C}\right)}_{\text{OPP se propageant selon } ox \searrow}$

OPP se propageant selon $ox \nearrow$ OPP se propageant selon $ox \searrow$

Alors, d'après (2) :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\rho_0 \left[\overset{\circ}{V}^+ \left(t - \frac{x}{C} \right) + \overset{\circ}{V}^- \left(t + \frac{x}{C} \right) \right] \Rightarrow \Pi(x,t) = \rho_0 C \left[V^+ \left(t - \frac{x}{C} \right) - V^- \left(t + \frac{x}{C} \right) \right] + 0$$

I.7) Pour un GP, l'évolution isentropique se traduit par l'équation de Laplace :

$$P = \text{cste } \rho^\gamma \Rightarrow \frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow X_{S_0} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

Enoncé en fin de document.

D'où :

$$C_{GP} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

A.N. : $C_{air} = 343 \text{ ms}^{-1}$

I.8) Pour l'eau $C_{eau} = 1480 \text{ ms}^{-1}$

Partie II : Réflexion et transmission d'une onde sonore

II.1) Pour l'OPP se propageant selon ox croissant :

$$\Pi(x,t) = \rho_0 C v(x,t) \Rightarrow Z = \rho_0 C \quad \text{d'après I.6) (impédance acoustique)}$$

II.2) Au niveau de l'interface (ie $x \approx 0$), il y a continuité :

* de la vitesse, car il n'y a pas de mélange entre les deux fluides, et $S_1 = S_2$ (si $S_1 \neq S_2$, il y a continuité du débit volumique Sv)

* de la surpression car :

$$\begin{cases} M \frac{d^2 v}{dt^2} = [P(0^-,t) - P(0^+,t)] S \\ M \rightarrow 0 \end{cases}$$

(On imagine la présence d'une paroi rigide de masse M à l'interface, $M \rightarrow 0$, cf. II.4).

II.3) * On a :

$$\begin{cases} v_i + v_r = v_t \\ Z_1(v_i - v_r) = Z_2 v_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{v_r}{v_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) \\ t = \frac{v_t}{v_i} = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases} \quad \text{d'après I.6)}$$

* Puis, si on définit : $\vec{\Pi}_a = \Pi \vec{v}$, vecteur de « Poynting acoustique » (vecteur de transport de l'énergie acoustique, en Wm^{-2}) :

$\Pi_a = \rho_0 C v^2$ pour une OPP, et :

$$\begin{cases} R = \frac{\langle \Pi_{ar} \rangle}{\langle \Pi_{ai} \rangle} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \\ T = \frac{\langle \Pi_{at} \rangle}{\langle \Pi_{ai} \rangle} = \frac{Z_2 t^2}{Z_1} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases}$$

II.4) En présence d'une paroi réelle de masse $M \neq 0$

* Continuité de v : $v(x = 0^-,t) = v(x = 0^+,t) = v_{paroi}$ ($\vec{v}_{fluide/paroi} = \vec{0}$, car il n'y a pas de débit entrant (ou sortant) de fluide dans (de) la paroi).

Enoncé en fin de doument.

* Discontinuité de Π : $M \frac{dv}{dt}(x=0, t) = [P(0^-) - P(0^+)] S = [(\Pi_i + \Pi_r) - \Pi_t] S$

II.5) Pour une OPPH se propageant selon ox croissant, on obtient donc :

$$\begin{cases} \underline{A}_i + \underline{A}_r = \underline{A}_t \\ iMw\underline{A}_t = [Z_1(\underline{A}_i - \underline{A}_r) - Z_2\underline{A}_t] S \end{cases}$$

On en déduit :

$$\underline{r} = \frac{\underline{A}_r}{\underline{A}_i} = \frac{Z_1 - \underline{Z}'_2}{Z_1 + \underline{Z}'_2} \text{ et } \underline{t} = \frac{2Z_1}{Z_1 + \underline{Z}'_2} \text{ si } \underline{Z}'_2 = Z_2 + iw \frac{M}{S}$$

Alors :

$$\begin{cases} \langle \Pi_{a_r} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\Pi}_r \underline{v}_r^*), \underline{\Pi} = Z_1 \underline{v}_r \\ \quad = \frac{1}{2} Z_1 |\underline{A}_r|^2 \\ \langle \Pi_{a_i} \rangle = \frac{1}{2} Z_1 |\underline{A}_i|^2 \\ \langle \Pi_{a_t} \rangle = \frac{1}{2} Z_2 |\underline{A}_t|^2 \end{cases}$$

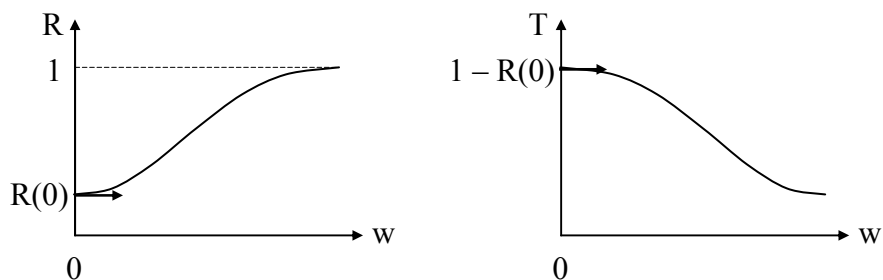
Ainsi :

$$R = |\underline{r}|^2 \text{ et } T = \frac{Z_2}{Z_1} |\underline{t}|^2$$

Soit :

$$\begin{cases} R = \frac{(Z_1 - Z_2)^2 + \frac{M^2 w^2}{S^2}}{(Z_1 + Z_2)^2 + \frac{M^2 w^2}{S^2}} \\ T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 + \frac{M^2 w^2}{S^2}} = 1 - R \end{cases}$$

* Influence de w à M fixée :



La transmission du son est donc favorisée pour les basses fréquences : à travers une cloison, les sons paraissent plus graves : celle-ci se comporte comme un filtre passe-bas acoustique.

Enoncé en fin de doument.
*** Influence de M à w fixée**

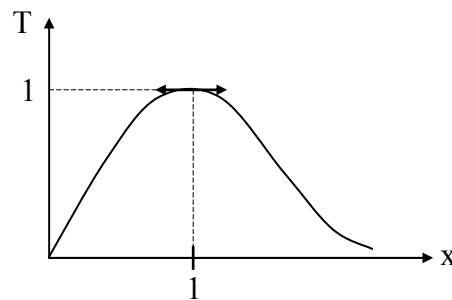
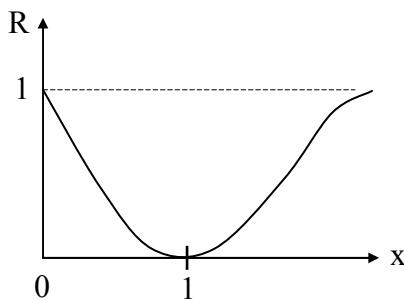
L'allure des graphes $R(M)$ et $T(M)$ à w fixée est la même que celle des graphes $R(w)$ et $T(w)$ à M fixée : aux fortes valeurs de M , il n'y a quasiment plus de vibrations de la cloison, et le son est alors totalement réfléchi.

Partie III : Principes de l'échographie

III.1) A.N. : $Z = \rho_0 C = \sqrt{\frac{\rho_0}{X}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$

III.2) Si $x = \frac{Z_2}{Z_1}$:

$$\begin{cases} R(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \\ T(x) = \frac{4x}{(1+x)^2} \end{cases}$$



On voit donc que la transmission d'une onde acoustique est favorisée si Z_1 et Z_2 sont de même ordre de grandeur.

* Air/peau : $Z_1 \gg Z_2 \Rightarrow \begin{cases} T \approx 0,1\% \\ R \approx 99,9\% \end{cases}$: tout le signal émis est réfléchi par la peau.

* Gel/peau : si $Z_{\text{gel}} \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1} \approx Z_{\text{peau}}$, alors il y aura une bonne transmission (T voisin de 1).

* Pour un poumon, il y a de nombreux interfaces air/tissu, de sorte que le signal sera intégralement réfléchi et l'échographie impossible.

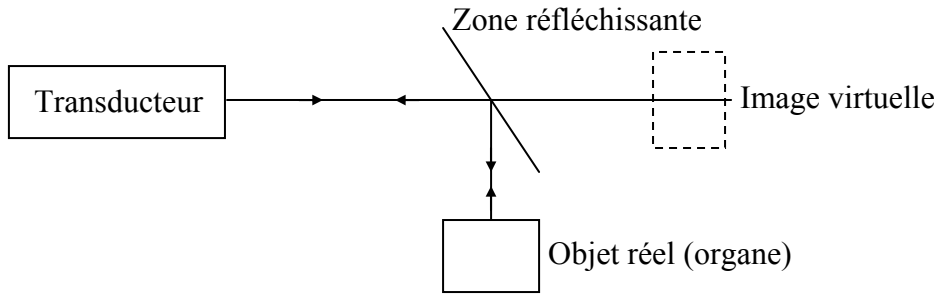
III.3) * Les zones blanches correspondent à une forte intensité réfléchie, donc Z_1 et Z_2 très différents : il s'agit donc du squelette du fœtus ($R_{\text{muscle/squelette}} \approx 41\%$).

* La boîte crânienne va réfléchir les ondes ultrasonores et donc empêcher la possibilité d'une échographie du cerveau.

* Les zones très réfléchissantes empêchent de visualiser ce qui se trouve derrière elles ; de plus, elles peuvent conduire à une saturation du récepteur.

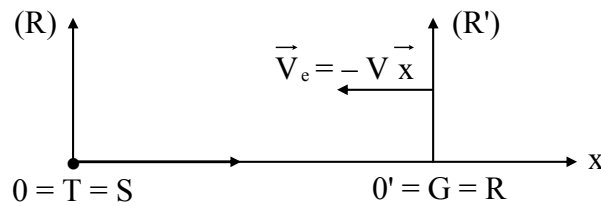
Énoncé en fin de document.

III.4) Une zone très réfléchissante se comporte comme un miroir acoustique qui donnera une image virtuelle de « l'objet » réel à étudier :



III.5.1) Effet Doppler longitudinal

* A l'aller : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Source} = \text{transducteur fixe lié à (R)} \\ \text{Récepteur} = \text{globule mobile lié à (R')} \end{array} \right.$



Il y a invariance de la phase de l'onde entre (R) et (R') (principe de relativité) : $\varphi = \varphi'$

Soit, pour des ondes planes : $w t - k x = w' t' - k' x'$ avec $\left\{ \begin{array}{l} t' = t \\ x' = x + V t \end{array} \right.$

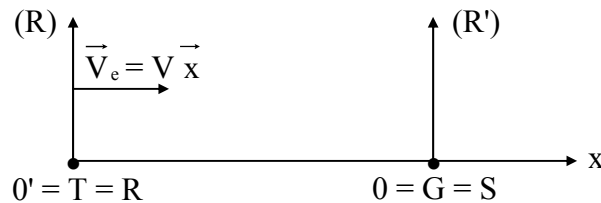
D'où : $w t - k x = w' t - k' (x + V t) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k' = k \\ w' = w + k V = w + k V = w \left(1 + \frac{V}{C} \right) \end{array} \right.$

Donc :

$$v' = v \left(1 + \frac{V}{C} \right) > v$$

↑ ↑
Reçue Emise

* Au retour : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Source} = \text{globule mobile lié à (R)} \\ \text{Récepteur} = \text{transducteur fixe lié à (R')} \end{array} \right.$



Cette fois :

$$v' = v \left(1 - \frac{V}{C} \right)$$

↑ ↑
Emise Reçue

Rem. : dans les 2 cas : $v_{\text{reçue}} > v_{\text{émise}}$ (décalage vers les aigus, ou le bleu).

Énoncé en fin de document.

* Pour un aller-retour :

$$\begin{cases} v' = v_i \left(1 + \frac{V}{C}\right) \\ v = v_r \left(1 - \frac{V}{C}\right) \end{cases} \Rightarrow v_r = v_i \left(\frac{1 + \frac{V}{C}}{1 - \frac{V}{C}} \right) \approx v_i \left(1 + \frac{2V}{C}\right)$$

au 1^{er} ordre en $\frac{V}{C}$

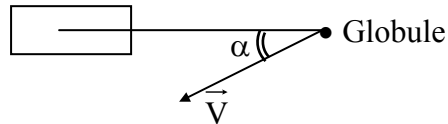
Ainsi :

$$v_r - v_i \approx 2 \frac{V}{C} v_i$$

III.5.2) Dans le décalage Doppler, seule V_x intervient, donc il suffit de remplacer V par $V \cos \alpha$:

$$v_r - v_i \approx \frac{2 V \cos \alpha}{v} v_i$$

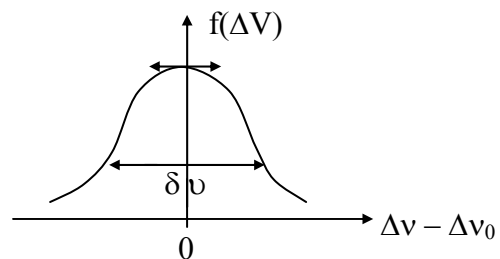
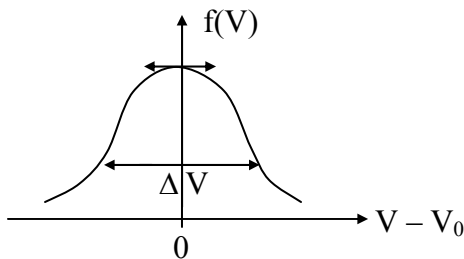
Transducteur



III.5.3) A.N. :

$$V = \frac{C \Delta v}{2 v_i} = 0,38 \text{ ms}^{-1}$$

III.3.4) La répartition des vitesses (gaussienne par exemple) provoque un élargissement du spectre (qui sera également gaussien).

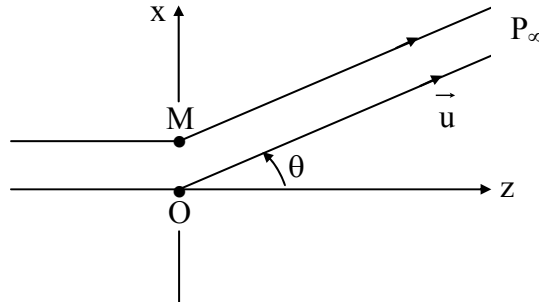


$$\begin{cases} \Delta v_0 = \frac{2 V_0}{2 v_i} v_i \\ \delta v = 2 \frac{\Delta V}{C} v_i \end{cases}$$

Enoncé en fin de document.

Partie IV : Quelques aspects des techniques d'échographie

IV.1.1) Comme $b \gg a$, toute l'intensité est diffractée dans le plan Oxz. Dans ce plan, l'intégrale de Fraunhofer s'écrit, sous incidence normale :



$$\underline{s} = \underline{cste} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} \underline{u} \cdot \underline{OM}} dx$$

(\underline{s} = amplitude complexe de l'onde de vitesse ou de surpression).

Soit :

$$\underline{s} = \underline{cste} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\pi ux} = \underline{cste} a \text{sinc}(\Pi ua) \quad \text{si} \quad \boxed{u = \frac{\sin \theta}{\lambda}}$$

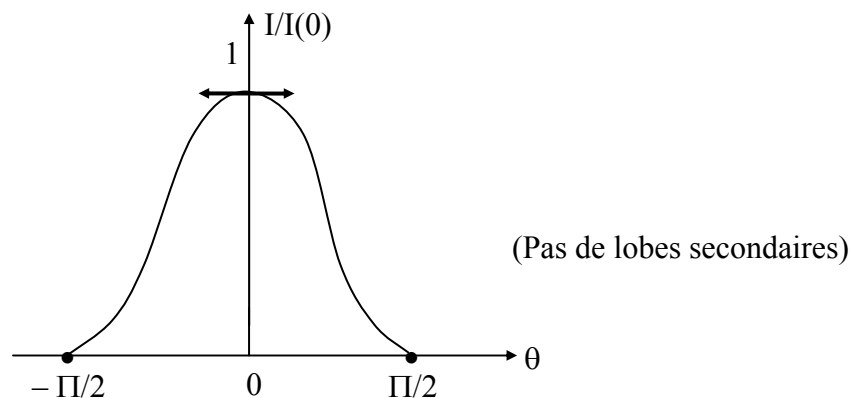
Puis :

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \underline{s} \underline{s}^* = I(0) \text{sinc}^2(\Pi ua)}$$

IV.1.2) A.N. : $\lambda = \frac{C}{v_0} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = a$

On est donc juste à limite de validité de la théorie scalaire de la diffraction, basée sur le principe d'Huygens-Fresnel, à savoir : $a \geq \lambda$.

L'allure du diagramme d'émission est alors la suivante :



IV.2.1) Il y a interférence constructive entre tous les transducteurs si :

$$\varphi = m2\pi, \varphi \text{ déphasage entre 2 transducteurs consécutifs.}$$

Or : $\delta = d \sin \theta$ d'après le théorème de Malus.