

I. ECOULEMENT DE FLUIDE EN MICRO CANAL

I.1. Écoulement sous un gradient de pression constante

I.1.1) * Le terme de gauche $(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v})$ représente l'accélération particulaire, somme de l'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et de l'accélération convective $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$.

$$* \begin{cases} \rho \vec{g} : \text{force volumique de pesanteur} \\ \overrightarrow{\text{grad}} P : \text{force volumique de pression} \\ \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v} : \text{force volumique de viscosité} \end{cases}$$

$$I.1.2) * R_e = \frac{\text{transfert convectif de } \vec{P}}{\text{transfert diffusif de } \vec{P}} = \frac{\rho \|\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}\|}{\eta \|\overrightarrow{\Delta} \vec{v}\|} \sim \frac{\rho v^2 / l}{\eta v / l^2} = \frac{\rho l v}{\eta}$$

On doit utiliser comme longueur caractéristique la plus petite des longueurs transverses, soit h.

Ainsi :

$$R_e = \frac{\rho h V_0}{\eta}$$

* **A.N.** : $R_e = 10^{-3} \ll 1$: écoulement laminaire, on peut négliger le terme convectif dans l'équation de Navier-Stokes

I.1.3) Pour un fluide incompressible : $\text{div } \vec{v} = 0$ (écoulement incompressible suffit...)

Alors, si a priori $\vec{v} = v_x(x,z,t)$:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

I.1.4) En régime laminaire stationnaire :

$$\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v} = 0$$

En projection sur Ox, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \Delta v = \eta \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Donc $\frac{\partial P}{\partial x}$ ne dépend que de z : $\frac{\partial P}{\partial x} = F(z)$.

Énoncé en fin de document.

Par intégration sur la longueur L du canal, on en déduit :

$$(P(L) - P(O)) = F(z) L \Rightarrow F(z) = - \frac{\Delta P}{L} = \text{cste}$$

Finalement, P ne dépend que de x et :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\Delta P}{L} < 0$$

De plus :

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} = - \frac{\Delta P}{L}$$

I.1.5) L'équation différentielle ci-dessus s'intègre en :

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{\Delta P}{\eta L} z + \alpha$$

Puis :

$$v(z) = - \frac{\Delta P}{2 \eta L} z^2 + \alpha z + \beta$$

Avec :

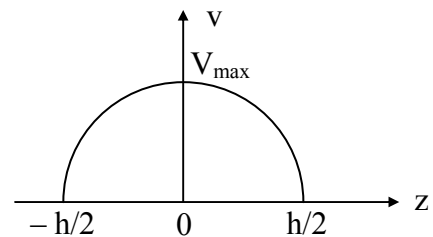
$$\begin{cases} v(z = \frac{h}{2}) = 0 \\ v(z = -\frac{h}{2}) = 0 \end{cases} \quad (\text{non glissement aux parois})$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = \frac{\Delta P}{2 \eta L} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Finalement :

$$v(z) = \frac{\Delta P}{2 \eta L} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right] \quad (\text{profil parabolique de vitesse})$$

$$V_{\max} = v(z = 0) = \frac{\Delta P h^2}{8 \eta L}$$



Vitesse moyenne de l'écoulement :

$$V_0 = \frac{1}{h} \int_{z=-h/2}^{h/2} v(z) dz$$

Soit :

$$V_0 = \frac{\Delta P}{2 \eta L} \frac{1}{h} 2 \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^h \Rightarrow V_0 = \frac{\Delta P}{12 \eta L} h^2$$

I.1.6) Le débit volumique à travers une section droite du canal est :

Enoncé en fin de document.

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \vec{x} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v(z)w dz = whV_0$$

Soit :

$$Q = \frac{h^3 w}{12 \eta L} \Delta P$$

I.1.7) A.N. :

$$* \quad \Delta P = 12 \eta_e \frac{LQ}{h^3 w} = 120 \text{ Pa}$$

$$* \quad \Delta H = \frac{\Delta P}{\rho g} = 12,2 \text{ mm}$$

$$* \text{ Pour } h = 100 \mu\text{m} \quad \begin{cases} \Delta P = 0,12 \text{ Pa} \\ \Delta H = 12,2 \mu\text{m} \end{cases}$$

Le contrôle de la dénivellation est alors beaucoup trop délicat.

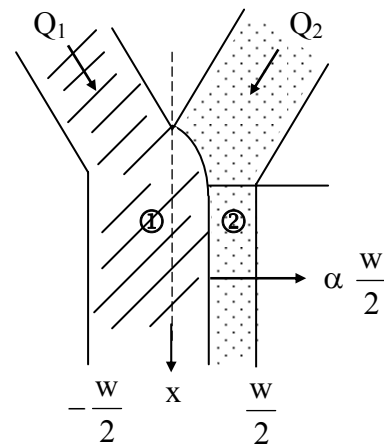
Donc, pour assurer un débit aussi faible que $Q = 10^{-12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, il faut construire un canal de taille micrométrique (de mise en œuvre délicate).

I.2) Ecoulement biphasique

I.2.1) Vue de dessus :

$$* \text{ Pour le fluide } \textcircled{1} : \quad Q_1 = \frac{h^3 \frac{w}{2} (1+\alpha)}{12 \eta_1 L} \Delta P$$

$$* \text{ Pour le fluide } \textcircled{2} : \quad Q_2 = \frac{h^3 \frac{w}{2} (1-\alpha)}{12 \eta_2 L} \Delta P$$



$$\text{Ainsi : } \frac{Q_1 \eta_1}{1+\alpha} = \frac{Q_2 \eta_2}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{Q_1 \eta_1 - Q_2 \eta_2}{Q_1 \eta_1 + Q_2 \eta_2}$$

$$\text{Rem. : } * \text{ Si } \eta_1 = \eta_2 : \alpha = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} \approx 1 \text{ si } Q_1 \gg Q_2$$

Pour 2 fluides de même viscosité, le fluide de plus grand débit occupe quasiment tout le lit du canal après jonction.

Énoncé en fin de document.

* Si $Q_1 = Q_2$: $\alpha = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \approx 1$ si $\eta_1 \gg \eta_2$: le fluide le plus visqueux occupe

tout le lit du canal.

$$\text{I.2.6) A.N. : } \alpha = \frac{50 \eta_e - \eta_h}{50 \eta_e + \eta_h} = -0,33$$

Même avec un débit cinquante fois plus grand pour l'eau, l'huile, 100 fois plus visqueuse, occupe l'essentiel du lit après la jonction.

II – ANALOGIE ELECTRONIQUE DES CANAUX MICROFLUIDIQUES

II.1) Analogues hydrauliques du courant et de la tension électrique

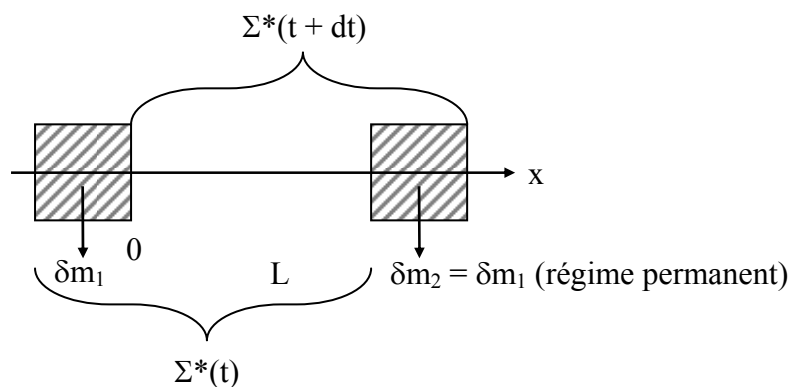
$$\text{II.1.1) } \vec{j} \longleftrightarrow \vec{v}$$

(vecteur transport de charges en $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) (vecteur transport de volume, en $\text{m}^3\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$)

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} \longleftrightarrow Q = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

(Flux de \vec{j} , en $\text{Cm}^{-2}\text{s}^{-1} \equiv \text{A}$) (Flux de \vec{v} , en m^3s^{-1})

II.1.2) Pour un écoulement de vitesse moyenne $\vec{V}_0 = V_0 \vec{x}$:



Le théorème de la puissance cinétique, appliqué au système fermé Σ^+ suivi dans son mouvement, s'écrit :

$$\underbrace{\frac{DE_C^*}{Dt}}_0 = P_{(\text{int} + \text{ext})}$$

0 (écoulement permanent et « uniforme »)

Énoncé en fin de document.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\text{pesanteur}) = 0 \text{ (écoulement horizontal)} \\ P_{\text{ext}}(\text{pression}) = P(O)V_0A - P(L)V_0A = Q\Delta P \\ P_{\text{int}}(\text{pression}) = 0 \text{ car fluide incompressible} \\ P_{\text{int}}(\text{viscosité}) = 0 \text{ car écoulement « uniforme »} \\ P_{\text{ext}}(\text{viscosité}) = P_{\text{vis}} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\underbrace{P_{\text{vis}}}_{< 0} + \underbrace{P_{\text{ext}}(\text{pression})}_{> 0} = 0$$

Et :

$$|P_{\text{vis}}| = P_{\text{ext}}(\text{pression}) = P_m = Q\Delta P$$

Analogie :

$$P_{\text{élect}} = I\Delta V$$


II.2) Résistance hydraulique. Application au tri de gouttelettes

II.2.1) On a, par analogie :

$$\Delta P = R_{\text{hd}}Q \Rightarrow R_{\text{hd}} = \frac{12 \eta L}{h^3 w}$$

II.2.2) $r_e = R_{\text{hd}}$ est la résistance hydraulique linéique d'un canal de longueur L rempli d'eau

II.2.3) Pour une « cellule » de longueur λ , le schéma hydraulique équivalent est :



$$\left\{ \begin{array}{l} R_e = \frac{12 \eta_e}{h^3 w} (-Lg) \\ R_h = \frac{12 \eta_h}{h^3 w} Lg \end{array} \right.$$

Pour l'ensemble des n cellules, la résistance hydraulique est :

$$R = n(R_e + R_h)$$

Soit :

$$R = n \frac{12}{h^3 w} [\eta_e (-\lambda - Lg) + \eta_h Lg] \Rightarrow R = n r_e \left[\lambda - Lg + \frac{\eta_h}{\eta_e} Lg \right]$$

Enoncé en fin de document.

Alors :

$$\Delta P = RQ_0 = nr_e \left[\lambda + \left(\frac{\eta_h}{\eta_e} - 1 \right) Lg \right] Q_0 \quad \left(\text{avec } n = \frac{L}{\lambda} \right)$$

Pour $\eta_e \ll \eta_h$:

$$\Delta P \approx L r_e \left[1 + \frac{\eta_h}{\eta_e} \frac{Lg}{\lambda} \right] Q_0$$

II.2.4) Par analogie :

$$\begin{cases} Q_0 = Q_1 + Q_2 \\ I_0 = I_1 + I_2 : \text{loi des nœuds} \end{cases}$$

II.2.5) D'après II.2.1), $R_2 > R_1$ si $L_2 > L_1$, donc pour une même différence de pression ΔP : $Q_2 < Q_1$: les gouttelettes d'huile sont orientées préférentiellement dans le bras 1.

II.2.6) * Lorsqu'un nombre croissant de gouttes pénètre dans le bras 1, R_1 augmente, donc Q_1 diminue, alors que $Q_2 = \text{cste}$. La condition $Q_2 < Q_1$ cessera donc d'être remplie : des gouttes passeront dans le bras 2, et le tri ne sera plus parfait.

$$\begin{cases} * \text{ Pour le bras 1 : } \Delta P = L_1 r_e \left(1 + \frac{Lg}{\lambda} \frac{\eta_h}{\eta_e} \right) Q_1 \\ \text{ Pour le bras 2 : } \Delta P = L_2 r_e Q_2 \end{cases}$$

Donc $Q_2 \leq Q_1$ si :

$$L_1 \left(1 + \frac{Lg}{\lambda} \frac{\eta_h}{\eta_e} \right) \leq L_2$$

Soit :

$$\frac{Lg}{\lambda} \leq \frac{\eta_e}{\eta_h} \left(\frac{L_2 - L_1}{L_1} \right)$$

II.3) Inertance hydraulique

II.3.1.a) La quantité de mouvement du fluide, en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{v}(t)$, est :

$$\vec{p}(t) = m \vec{v}(t) = \rho L A \vec{v}(t)$$

Soit :

$$\vec{p}(t) = \rho L Q(t) \vec{x}$$

b) Appliquons le théorème de la résultante cinétique au système fermé Σ^* de la question II.1.2) (mais cette fois en régime non permanent...) :

$$\frac{D\vec{p}^*}{Dt} = \Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$$

Énoncé en fin de document.

avec :
$$\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_1 \vec{v}(t)$$

$$\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_2 \vec{v}(t + dt)$$

avec
$$\begin{cases} \delta m_1 = \rho A v(t) dt \\ \delta m_2 = \rho A v(t + dt) dt \end{cases}$$

Donc : $\delta m_2 v(t + dt) - \delta m_1 v(t) = \rho A [(v + dv)^2 - v^2] dt$ est d'ordre supérieur ou égal à 2.

Ainsi :
$$\frac{D\vec{p}^*}{Dt} = \frac{\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} \approx \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Par ailleurs :
$$\Sigma \vec{F}_{ext} = (\Delta P_i A) \vec{x} \quad (\text{viscosité négligée})$$

Ainsi :
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = (\Delta P_i A) \vec{x} = \rho L \frac{dQ}{dt} \vec{x} \Rightarrow \Delta P_i = I_{hd} \frac{dQ}{dt}$$

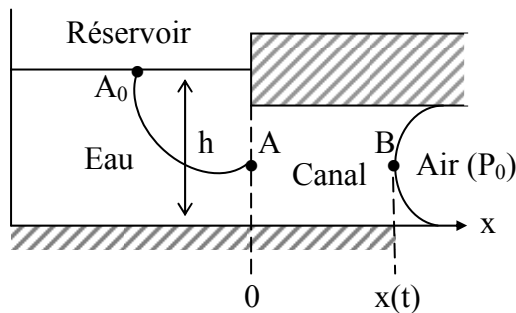
avec
$$I_{hd} = \frac{\rho L}{A}$$

c) * I_{hd} représente l'inertie du fluide à se mettre en mouvement sous l'action d'une différence de pression.

* Analogie électrique : $\Delta V = \mathcal{L} \frac{dI}{dt}$

$I_{hd} \leftrightarrow \mathcal{L}$ (inductance propre)

II.4) Compliance hydraulique



II.4.1) a) * $\Delta P_{cap} = \frac{2\gamma}{h} = 14 \times 10^3 \text{ Pa} = 0,14 P_0$

* $\Delta P_{hyd} = \rho gh = 0,10 \text{ Pa} \ll \Delta P_{cap}$

Donc les effets capillaires prédominent et le fluide progresse dans le canal avec une courbure constante à l'interface.

b) Appliquons Bernoulli sur une ligne de courant de A_0 à A (fluide parfait, régime permanent, $\rho = \text{cste}$).

Enoncé en fin de document.

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho gh = P_A + \frac{1}{2} \rho \dot{x}^2$$

Avec $v_0 \approx 0$

$$P_A - P_0 = -\frac{1}{2} \rho \dot{x}^2$$

Rem. : Dans le canal, la conservation du débit implique $v = v(t) = \dot{x}(t)$.

c) On a : * $P_A - P_B = (r_e x) Q = (r_e x) (A \dot{x})$ (Hagen-Poiseuille)

$$* P_B - P_{\text{air}} = P_B - P_0 = -\frac{2\gamma}{h}$$

D'où :

$$P_A - P_0 = Ar_e x \dot{x} - \frac{2\gamma}{h}$$

d) On en déduit l'équation différentielle qui régit $x(t)$:

$$Ar_e x \dot{x} - \frac{2\gamma}{h} = -\frac{1}{2} \rho \dot{x}^2$$

$$e) * [r_e] = \left[\frac{\eta}{h^3 w} \right] = \left[\frac{\eta}{h^4} \right]$$

Donc :

$$[\theta] = \left[\frac{\rho}{r_e A} \right] = \left[\frac{\rho h^2}{\eta} \right] = \left[\frac{h^2}{v} \right] = [\tau]$$

$$* [b] = \left[\frac{1}{r_e A} \sqrt{\frac{\rho \gamma}{h}} \right] = \left[\frac{\theta}{\rho} \sqrt{\frac{\rho \gamma}{h}} \right] = \left[\theta \sqrt{\frac{\gamma}{\rho h}} \right] = \left[\theta \sqrt{\frac{P}{\rho}} \right] = [\theta v] = [\tau v]$$

donc b est bien homogène à une longueur.

$$* \bullet \frac{dY}{dT} = \frac{\theta}{b} \frac{dx}{dt} \Rightarrow 4 \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 = 4 \left(\frac{\theta}{b} \right)^2 \dot{x}^2 = \frac{\rho h}{4\gamma} \dot{x}^2$$

$$\bullet 4 Y \frac{dY}{dT} = 4 \frac{\theta}{b^2} x \dot{x} = \frac{r_e A}{2} \frac{h}{\gamma} x \dot{x}$$

Or, l'équation obtenue en d) s'écrit aussi :

$$\frac{\rho h}{4\gamma} \dot{x}^2 + \frac{h}{2\gamma} Ar_e x \dot{x} - 1 = 0$$

On obtient donc bien l'équation adimensionnée :