



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ANALYSE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE-33

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ,  $g(x) = \frac{e^x}{1-x}$

1) Montrer que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} - \{1\}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et tout  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ , calculer  $g^{(n)}(x)$  en utilisant  $P_n$

2) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 = e^x P_n(-x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^x e^t t^n dt$$

3) Dédire du 2) le nombre de racines réelles de  $P_n(x)$  puis de  $g^{(n)}(x) = 0$