VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–34

On suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La lettre a désigne un réel strictement positif.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable admettant f pour densité. Calculer l'espérance $E(X)$ de X.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+1)^n x^a}{\Gamma(n)}(-\ln x)^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a(-\ln x)^{n-1}dx$.

b) A l'aide du changement de variable $u = -\ln x$, montrer que g_n est une densité de probabilité.

Soit T_n une variable aléatoire réelle de densité g_n.

c) Vérifier que T_n admet une espérance et calculer $E(T_n)$.

3) Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes, suivant la même loi que X. On pose $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$.

a) Donner une densité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies par $Y_1 = \ln X_1$ et $Y_2 = -\ln X_2$.

b) En déduire une densité de la variable $T = \ln Z$.

c) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{a+1}{2}x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{a+1}{2}x^{-(a+2)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que h est une densité de Z.

4) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On pose $W_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

a) Montrer que la variable W_n admet g_n pour densité.

b) Retrouver le résultat de la question 2.c).

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 34

1–a)

On vérifie facilement que la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

On peut remarquer que f est continue en 0, mais pas en 1 (ces considérations n'ayant pas de conséquences pour la suite).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \left[(a+1)\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = 1.$$

Nous pouvons conclure : f est une densité de probabilité.

1–b)

L'espérance de X existe puisqu'en fait l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ se réduit à l'intégrale $\int_0^1 xf(x)dx$

$$E(X) = \int_0^1 (a+1)x^{a+1}dx = \left[\frac{a+1}{a+2}x^{a+2}\right]_0^1, \text{ donc } \boxed{E(X) = \frac{a+1}{a+2}}$$

2–a)

La fonction $x \longmapsto x^a(-\ln x)^{n-1}$ est continue sur $]0, 1]$ puisque $n - 1 \geq 0$.

De plus, si $n \geq 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a(-\ln x)^{n-1} = 0$ par croissances comparées et,

si $n = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ sans problème.

La fonction $x \longmapsto x^a(-\ln x)^{n-1}$ est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale $\int_0^1 x^a(-\ln x)^{n-1}dx$ est faussement impropre et par conséquent convergente.

2–b)

La fonction g_n est évidemment positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ sans problème. On vient de voir en fait que $\lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x) = 0 = g_n(0)$. Donc elle est continue en 0, mais elle n'est continue en 1 que lorsque $n \geq 2$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$ se ramène à $\int_0^1 g_n(x)dx$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$ converge d'après la question précédente.

Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$.

Posons $u = -\ln x$. Ce changement de variable est de classe C^1 et strictement monotone sur $]0, 1]$, il est donc légitime.

On a $x = e^{-u}$, $dx = -e^{-u}du$. Par suite

$$\int_0^1 g_n(x)dx = -\int_{+\infty}^0 \frac{(a+1)^n e^{-(a+1)u}u^{n-1}}{\Gamma(n)}du = \int_0^{+\infty} \frac{(a+1)^n e^{-(a+1)u}u^{n-1}}{\Gamma(n)}du$$

On reconnaît l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une densité de la loi $\Gamma(a+1, n)$, donc cette intégrale vaut 1.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.