



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### VARIABLES A DENSITE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE-35

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes  $(X_k)_{k \geq 1}$ , définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et suivant toutes la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $Z_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$ , c'est-à-dire que :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, Z_n(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On admet que  $Z_n$  est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- 1) Donner la fonction de répartition et une densité de  $Z_n$ .
- 2) Soit  $U$  une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendante des  $X_k$  et suivant la loi uniforme sur  $[0; 1]$ .
  - a) Déterminer une densité de  $-U$ .
  - b) Déterminer une densité  $g$  de  $Z_n - U$ .
  - c) En considérant la variable aléatoire  $M_n$  définie par  $M_n = \inf(X_2, \dots, X_n)$ , déduire de ce qui précède la valeur de  $P(Z_n = X_1)$ .

Ce résultat était-il prévisible ? La variable aléatoire  $Z_n - X_1$  est-elle une variable à densité ? La variable aléatoire  $Z_n - X_1$  est-elle une variable discrète ?

- 3) On pose  $W_n = \ln Z_n$ .
  - a) Déterminer une densité de  $W_n$ .
  - b) Soit  $(Y_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

i) Déterminer une densité de  $T_{n+1} = -\frac{Y_{n+1}}{n+1}$ .

ii) On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = -\sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{k}$ .

Montrer que  $S_n$  et  $W_n$  possède la même densité.

c) Montrer, sans calculer explicitement l'intégrale, que

$$\int_{-\infty}^0 x \exp(x)(1 - \exp(x))^{n-1} dx = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 35

1) \_\_\_\_\_

Pour tout réel  $x$ ,  $(Z_n > x) = (\inf(X_1, \dots, X_n) > x) = (X_1 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)$ . Notons  $F_k$  la fonction de répartition de  $X_k$ .

Par indépendance des variables  $X_i$ ,

$$P(Z_n > x) = \prod_{k=1}^n (P(X_k > x)) = \prod_{k=1}^n (1 - P(X_k \leq x)) = \prod_{k=1}^n (1 - F_k(x)) \text{ et finalement, puisque}$$

les variables  $X_k$  suivent la même loi que  $X_1$ , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - P(Z_n \leq x) = (1 - F_1(x))^n \text{ et donc } \forall x \in \mathbb{R}, F_{Z_n}(x) = 1 - (1 - F_1(x))^n$$

$$\text{Rappelons que } F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1 - x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que  $F_{Z_n}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ , donc  $Z_n$  est une variable à densité.

On prendra pour densité  $f_{Z_n}$  de  $Z_n$ ,  $F'_{Z_n}$  sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ , et on prolongera par continuité aux points  $0^+$  et  $1^-$ .

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n(1 - x)^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2-a) \_\_\_\_\_

Il est clair que  $(-U)(\Omega) = [-1, 0]$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, P(-U \leq x) &= P(U \geq -x) = 1 - P(U < -x) \\ &= 1 - P(U \leq -x) \quad \text{car } U \text{ est une variable à densité} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } F_{-U}(x) = 1 - F_U(-x).$$

Or  $x \leq -1 \iff -x \geq 1$ , donc  $F_U(-x) = 1$ ;  $-1 \leq x \leq 0 \iff 0 \leq -x \leq 1$ , donc  $F_U(-x) = -x$  et  $x \geq 0 \iff -x \leq 0$ , donc  $F_U(-x) = 0$ .

$$\text{Ce qui donne } F_{-U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On peut remarquer que  $-U$  suit la loi uniforme sur  $[-1, 0]$ .

2-b) \_\_\_\_\_

Notons  $T_n = Z_n - U = Z_n + (-U)$ . La variable  $U$  est indépendante de  $X_1, \dots, X_n$ , donc  $-U$  aussi et par conséquent  $-U$  est indépendante de  $Z_n$ . De plus les densités de  $Z_n$  et de  $-U$  sont bornées, il en résulte qu'une densité  $g$  de  $T_n$  est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_n}(t) f_{-U}(x-t) dt \\ &= \int_0^1 f_{Z_n}(t) f_{-U}(x-t) dt \quad \text{car } f_{Z_n} \text{ est nulle à l'extérieur de } [0, 1] \\ &= n \int_0^1 (1-t)^{n-1} f_{-U}(x-t) dt \end{aligned}$$