



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-10

1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{r_n}{n!}, \text{ avec } r_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq r_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (r_n) .

3) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{1}{n+1} + \frac{r_{n+1}}{n+1}.$$

b) Montrer, en utilisant la question 2), que

$$\frac{r_{n+1}}{n+1} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

4) a) En exprimant que $\frac{r_{n+1}}{n+1} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, déduire qu'il existe une fonction α telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{r_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \alpha(n), \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(n) = 0.$$

En déduire que $\frac{r_n}{n+1} = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

b) Conclure, en utilisant la question 3) a) que

$$r_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

5) Retrouver ce dernier résultat plus facilement sans utiliser le b) de la question 3).