ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−14

On considère pour $n \geq 2$ la suite de fonctions (P_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}.\ \text{Pour } x = 0 \text{ et } k = 1, \text{ on pose } 0^0 = 1.$$

1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 2$ admet sur $\mathbb{R}_+$ une unique solution que l'on notera x_n ; situer x_n entre deux entiers consécutifs.

2) a) Donner une relation entre $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.

b) Etudier les variations de la suite (x_n). En déduire que cette suite est convergente. On notera ℓ sa limite.

3) Vérifier que, pour tout réel x et tout $n \geq 2$, on a l'égalité :

$$(x-1)^2 \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.$$

4) Etablir l'égalité suivante :

$$\ln x_n = \frac{\ln(-1 + 4x_n - 2x_n^2)}{n} - \frac{\ln(n+1-nx_n)}{n}.$$

On justifiera que $-1 + 4x_n - 2x_n^2 > 0$ et que $n + 1 - nx_n > 0$.

5) a) En encadrant x_n, montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1-nx_n)}{n} = 0$.

b) Montrer que nécessairement $-1 + 4\ell - 2\ell^2 \geq 0$.

En supposant que $-1 + 4\ell - 2\ell^2 > 0$, montrer qu'on obtient alors $\ell = 1$. Conclure à une absurdité.

c) En déduire la valeur de ℓ.