



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-16

Croissances comparées, écriture de limite

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^3$.

- 1) Déterminer un encadrement de u_n à l'aide de deux intégrales de la fonction $\varphi : t \mapsto (\ln t)^3$.
- 2) Calculer ces deux intégrales et en déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ où $v_n = n(\ln n)^3$.
- 3) a) En utilisant le résultat de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}$, majorer $\frac{(\ln n)^3}{n^2}$.
b) En déduire que la série de terme général $\frac{u_n}{n^3}$ est convergente.
- 4) On considère maintenant la suite (w_n) de terme général $w_n = u_n - v_n$.

Après avoir justifié que $w_n = \sum_{k=2}^n (w_k - w_{k-1})$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

CORRIGE DE L'EXERCICE
CORRIGE :
QUESTION-1

Remarque : $u_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^3 = \sum_{k=2}^n (\ln k)^3$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

Par croissance de φ , $\forall t \in [k, k+1]$, $\varphi(k) \leq \varphi(t) \leq \varphi(k+1)$. En intégrant entre k et $k+1$ (**bornes dans le sens croissant**), on obtient l'encadrement

$$\varphi(k) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(k+1). \text{ Ecrivons-le au rang précédent,}$$

$\varphi(k-1) \leq \int_{k-1}^k \varphi(t) dt \leq \varphi(k)$. Par comparaison des deux encadrements, on obtient l'encadrement de $\varphi(k)$ suivant :

$$\int_{k-1}^k \varphi(t) dt \leq \varphi(k) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t) dt, \text{ pour } k \geq 2.$$

Sommons ces encadrements pour k variant de 2 à n ;

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \varphi(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \varphi(k) \leq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \varphi(t) dt, \text{ soit en utilisant la relation de Chasles,}$$

$$\int_1^n \varphi(t) dt \leq u_n \leq \int_2^{n+1} \varphi(t) dt. \quad (1)$$

QUESTION-2

- Calcul de $I(x) = \int_1^x \varphi(t) dt$ par parties pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= (\ln t)^3 & ; & & u'(t) &= \frac{3(\ln t)^2}{t} \\ v'(t) &= 1 & ; & & v(t) &= t, \end{aligned}$$

u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[1; x]$ si $1 \leq x$ ou $[x; 1]$ si $x \leq 1$.

$$\begin{aligned} I(x) &= [t(\ln t)^3]_1^x - 3 \int_1^x (\ln t)^2 dt \\ &= x(\ln x)^3 - 3 \underbrace{\int_1^x (\ln t)^2 dt}_{J(x)} \end{aligned}$$

- Calcul de $J(x)$ par parties :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= (\ln t)^2 & ; & & u_1'(t) &= \frac{2(\ln t)}{t} \\ v_1'(t) &= 1 & ; & & v_1(t) &= t, \end{aligned}$$

u_1 et v_1 sont \mathcal{C}^1 sur $[1; x]$ si $1 \leq x$ ou $[x; 1]$ si $x \leq 1$.

$$\begin{aligned} J(x) &= [t(\ln t)^2]_1^x - 2 \int_1^x (\ln t) dt \\ &= x(\ln x)^2 - 2 [t \ln t - t]_1^x \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + 1). \end{aligned}$$

Revenons à $I(x)$; en substituant, on a :

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.