ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–16

Croissances comparées, écriture de limite

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^3$.

1) Déterminer un encadrement de u_n à l'aide de deux intégrales de la fonction $\varphi : t \longmapsto (\ln t)^3$.

2) Calculer ces deux intégrales et en déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ où $v_n = n(\ln n)^3$.

3) a) En utilisant le résultat de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}$, majorer $\dfrac{(\ln n)^3}{n^2}$.

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{u_n}{n^3}$ est convergente.

4) On considère maintenant la suite (w_n) de terme général $w_n = u_n - v_n$.

Après avoir justifié que $w_n = \sum_{k=2}^{n} (w_k - w_{k-1})$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

Remarque : $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^3 = \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^3$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

Par croissance de $\varphi, \forall t \in [k, k+1],\ \varphi(k) \leq \varphi(t) \leq \varphi(k+1)$. En intégrant entre k et $k+1$ (**bornes dans le sens croissant**), on obtient l'encadrement

$\varphi(k) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t)dt \leq \varphi(k+1)$. Ecrivons-le au rang précédent,

$\varphi(k-1) \leq \int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt \leq \varphi(k)$. Par comparaison des deux encadrements, on obtient l'encadrement de $\varphi(k)$ suivant :

$$\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt \leq \varphi(k) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t)dt, \text{ pour } k \geq 2.$$

Sommons ces encadrements pour k variant de 2 à n ;

$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt \leq \sum_{k=2}^{n} \varphi(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \varphi(t)dt$, soit en utilisant la relation de Chasles,

$$\boxed{\int_1^n \varphi(t)dt \leq u_n \leq \int_2^{n+1} \varphi(t)dt. \qquad \textbf{(1)}}$$

QUESTION–2

- Calcul de $I(x) = \int_1^x \varphi(t)dt$ par parties pour $x > 0$:

$u(t) = (\ln t)^3$; $u'(t) = \dfrac{3(\ln t)^2}{t}$

$v'(t) = 1$; $v(t) = t$,

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1;x]$ si $1 \leq x$ ou $[x;1]$ si $x \leq 1$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[t(\ln t)^3\right]_1^x - 3\int_1^x (\ln t)^2 dt \\ &= x(\ln x)^3 - 3\underbrace{\int_1^x (\ln t)^2 dt}_{J(x)} \end{aligned}$$

- Calcul de $J(x)$ par parties :

$u_1(t) = (\ln t)^2$; $u_1{}'(t) = \dfrac{2(\ln t)}{t}$

$v_1{}'(t) = 1$; $v_1(t) = t$,

u_1 et v_1 sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1;x]$ si $1 \leq x$ ou $[x;1]$ si $x \leq 1$.

$$\begin{aligned} J(x) &= \left[t(\ln t)^2\right]_1^x - 2\int_1^x (\ln t)dt \\ &= x(\ln x)^2 - 2\left[t\ln t - t\right]_1^x \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x + 1). \end{aligned}$$

Revenons à $I(x)$; en substituant, on a :

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.