EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–18

1) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}dx$ est convergente.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \sqrt{n} I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1} I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\geq 0}$ et $(K_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

5) a) Calculer I_n en fonctions de n.

b) En admettant que $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling),

montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} e\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

La fonction f est continue sur $[0;1]$, donc sa valeur absolue $|f|$ est majorée sur $[0;1]$ par un réel que nous noterons M.

Nous avons donc : $\forall t \in [0;1],\ 0 \leq |f(t)| \leq M$.

Multiplions cet encadrement par $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$; on obtient :

$$\forall t \in [0;1[,\ 0 \leq \frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-t}}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ est impropre en 1 car $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0;1[$. Elle est convergente car $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est une fonction de référence sur $[0;1[$ de la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{M dt}{\sqrt{1-t}}$ est convergente.

> **Le théorème de comparaison des fonctions positives** permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|dt}{\sqrt{1-t}}$ est convergente.
>
> Cela veut dire que **l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t}}$ est absolument convergente, donc convergente.**

QUESTION–2

Remarquons que les fonctions $t \longmapsto t^k$, pour $k \in \mathbb{N}$, sont continues sur $[0;1]$, donc d'après la question **1)** les intégrales I_k sont convergentes.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}dt}{\sqrt{1-t}} - \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(t-1)dt}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

Or sur $[0;1[$, $\dfrac{t^n(t-1)dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0$; **les bornes étant dans l'ordre croissant,** on conclut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(t-1)dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0$, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

> La suite (I_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 : le théorème des suites monotones bornées permet de conclure que la suite (I_n) est convergente.

QUESTION–3

a)

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.