EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−18

1) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}dx$ est convergente.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \sqrt{n} I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1} I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\geq 0}$ et $(K_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

5) a) Calculer I_n en fonctions de n.

b) En admettant que $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling),

montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} e\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

La fonction f est continue sur $[0;1]$, donc sa valeur absolue $|f|$ est majorée sur $[0;1]$ par un réel que nous noterons M.

Nous avons donc : $\forall t \in [0;1],\ 0 \leq |f(t)| \leq M$.

Multiplions cet encadrement par $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$; on obtient :

$\forall t \in [0;1[,\ 0 \leq \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}} \leq \dfrac{M}{\sqrt{1-t}}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ est impropre en 1 car $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0;1[$. Elle est convergente car $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est une fonction de référence sur $[0;1[$ de la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{M\,dt}{\sqrt{1-t}}$ est convergente.

Le théorème de comparaison des fonctions positives permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|dt}{\sqrt{1-t}}$ est convergente.

Cela veut dire que **l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t}}$ **est absolument convergente, donc convergente.**

QUESTION–2

Remarquons que les fonctions $t \longmapsto t^k$, pour $k \in \mathbb{N}$, sont continues sur $[0;1]$, donc d'après la question **1)** les intégrales I_k sont convergentes.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}dt}{\sqrt{1-t}} - \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(t-1)dt}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

Or sur $[0;1[$, $\dfrac{t^n(t-1)dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0$; **les bornes étant dans l'ordre croissant,** on conclut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(t-1)dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0$, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

La suite (I_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 : le théorème des suites monotones bornées permet de conclure que la suite (I_n) est convergente.

QUESTION–3

a)