EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−19

On définit la fonction g par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g et montrer que g se prolonge par continuité en 0 ; on notera f ce prolongement.

2) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et étudier la position de la courbe Γ représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

3) Etudier les variations de f

4) a) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in]-1,+\infty[-\{0\}, \quad \frac{1}{(1+x)x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}.$$

b) Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe Γ.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

$D_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to -1_+} g(x) = +\infty$, car le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers -1.

La limite de g en 0 est indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". Pour lever l'indétermination, effectuons un développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3 à cause du dénominateur.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_0 \varepsilon(x) = 0$. Donc

$$g(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3} + \varepsilon(x).$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{3}.}$$

La fonction g se prolonge par continuité en 0 en une application f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \textbf{pour } x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \frac{1}{3} & \textbf{pour } x = 0. \end{cases}$$

QUESTION−2

f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, comme quotient de fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas.

- **Dérivabilité en 0 :** revenons à la définition et étudions le taux d'accroissement $T(x)$ de f au voisinage de 0.

$$T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{3\ln(1+x) - 3x + \frac{3x^2}{2} - x^3}{3x^4}.$$

Effectuons un DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 4 à cause du dénominateur qui est en x^4.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Il vient alors

$$T(x) = \frac{3x - \frac{3x^2}{2} + x^3 - \frac{3x^4}{4} + 3x^4\varepsilon_1(x) - 3x + \frac{3x^2}{2} - x^3}{3x^4}$$

$$= -\frac{1}{4} + \varepsilon_1(x).$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente au point de coordonnées $(0, \frac{1}{3})$ est

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}(x - 0), \text{ soit } y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{3}.$$