EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–20

Soit n un entier naturel non nul. On considère une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et on définit l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(0) = f(0) \quad \text{et pour } x \neq 0,\; f_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}f(t)dt.$$

1) Que peut-on dire de f_n lorsque f est paire, impaire ?

2) Déterminer f_n lorsque $f(x) = |x|^a$, où $a \in \mathbb{N}^*$.

3) a) Que veut dire la proposition suivante ?

$$\forall \varepsilon > 0,\; \exists\, \alpha > 0 \;/\; \forall t \in [-\alpha;\alpha],\; |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon. \qquad (*)$$

b) Soit $\alpha > 0$. On considère un réel $x \neq 0 \;/\; |x| \leq \alpha$.
Montrer que $\forall t \in [0;x]$ (si $x > 0$) ou $t \in [x;0]$ (si $x < 0$), on a $|t| \leq \alpha$.

4) Montrer que

$$\forall x \neq 0,\; f_n(x) - f_n(0) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}(f(t) - f(0))dt.$$

5) a) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}|f(t) - f(0)|dt.$$

En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0,\; \exists\, \alpha_1 > 0 \;/\; \forall x \in]0;\alpha_1],\; |f_n(x) - f_n(0)| \leq \varepsilon.$$

b) Montrer que pour $x < 0$, on a

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{n}{|x^n|}\int_x^0 |t|^{n-1}|f(t) - f(0)|dt.$$

En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0,\; \exists\, \alpha_2 > 0 \;/\; \forall x \in [-\alpha_2;0[,\; |f_n(x) - f_n(0)| \leq \varepsilon.$$

c) En déduire que f_n est continue en 0.

6) On suppose de plus que f est dérivable en 0. Montrer qu'il existe une fonction continue ε_1 telle que :

$$\forall x \neq 0,\; \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{n}{n+1}f'(0) + \frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\varepsilon_1(t)dt.$$

En déduire ${f_n}'(0)$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

Effectuons le changement de variable $\mathcal{C}^1$: $t = -u$.

$$\begin{aligned}\forall x \neq 0,\ f_n(x) &= \frac{n}{x^n}\int_0^{-x}(-u)^{n-1}f(-u)(-du) = (-1)^n\frac{n}{x^n}\int_0^{-x}u^{n-1}f(-u)du \\ &= \frac{n}{(-x)^n}\int_0^{-x}u^{n-1}f(-u)du.\end{aligned}$$

- Si f est paire, $f(-u) = f(u)$ et l'égalité précédente donne :

$f_n(x) = \dfrac{n}{(-x)^n}\displaystyle\int_0^{-x}u^{n-1}f(u)du = f_n(-x)$. Or $f_n(0) = f_n(-0) = f(0)$.

Donc $\boxed{f \text{ paire implique } f_n \text{ paire,}}$

- On montre de même que $\boxed{f \text{ impaire implique } f_n \text{ impaire.}}$

On aura remarqué que $f(0) = -f(0) = 0$ si f est impaire.

QUESTION−2

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. On calculera $f_n(x)$ pour $x > 0$.

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}t^a dt = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1+a}dt \\ &= \frac{n}{n+a}\frac{1}{x^n}x^{n+a} = \frac{n}{n+a}x^a\end{aligned}$$

Comme f_n est paire, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_n(x) = \dfrac{n}{n+a}|x|^a.}$

On vérifie que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0 = f(0)$.

QUESTION−3

a)

La proposition exprime que f est continue au point 0.

b)

Si $x > 0,\ 0 \le t \le x \Longrightarrow |t| \le |x| \le |\alpha|$.

Si $x < 0,\ x \le t \le 0 \Longleftrightarrow 0 \le -t \le -x$ (on a multiplié par -1), donc $|t| \le |x|$.

$$\boxed{\text{Dans les deux cas on a } |t| \le |\alpha|.}$$

QUESTION−4

Remarquons que $\dfrac{n}{x^n}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}dt = \dfrac{n}{x^n}\left[\dfrac{t^n}{n}\right]_0^x = 1$. donc

$$\begin{aligned}f_n(x) - f_n(0) &= \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}f(t)dt - f_n(0)\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}dt \\ &= \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}(f(t)-f(0))dt.\end{aligned}$$