EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–22

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel **non nul.**

1) Etudier la convergence de l'intégrale

$$I_n(x) = \int_{-\ln x}^{+\infty} e^{-nt} dt.$$

2) Etudier, suivant les valeurs de x, la convergence de la série de terme général $I_n(x)$.

3) On pose

$$J_n(x) = \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-t} dt.$$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J_n(x)$.

(On distinguera les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$).

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = J_n(x)$.

4) On suppose ici que $x \in]0; 1[$.

a) Etudier la fonction g définie sur $[-\ln x, +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

b) Calculer $\int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

Posons $f_n(t) = e^{-nt}$, pour $t \in I = [-\ln x; +\infty[$ et $x > 0$. La fonction f_n est continue, dérivable sur I, comme composée de fonctions continues, dérivables. En effet,

$u : t \longmapsto -nt$ est continue, dérivable sur I ; exp est continue dérivable sur l'intervalle image $u(I)$, puisqu'elle est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\exp \circ u$ est continue, dérivable sur I.

L'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_{-\ln x}^{+\infty} f_n(t)dt$ est impropre en $+\infty$.

Etudions la convergence de $I_n(x)$, puis calculons-la .

- f_n est positive ; d'après les croissances comparées, on a

$\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t)t^2 = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2}{(e^t)^n} = 0$. Exprimons ce résultat :

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \ / \ \forall t \geq A, \ |f_n(t)t^2 - 0| \leq \varepsilon.$

Ce qui compte tenu du fait que $f_n(t)t^2 \geq 0$ s'écrit :

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \ / \ \forall t \geq A, \ 0 \leq f_n(t)t^2 \leq \varepsilon.$

Or pour $A > 0, t^2 > 0$; on peut diviser la dernière inégalité par t^2 ;

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \ / \ \forall t \geq A, \ 0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{\varepsilon}{t^2}\cdot$

Appliquons cette inégalité pour $\varepsilon = 1$; on a

$$\exists\, A > 0 \ / \ \forall t \in [A; +\infty[, \ 0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{t^2}\cdot$$

L'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge d'après le critère de Riemann ; donc par utilisation du théorème de comparaison des fonctions positives, on conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\ln x}^{+\infty} f_n(t)dt$ converge aussi (puisque sur l'intervalle $[-\ln x; A]$, f_n est continue).

Remarque : Nous avons fait la démonstration en détail, car cette situation est fréquente (il faut donc savoir la traiter) et elle utilise un résultat important du cours (les croissances comparées).

- Calcul de $I_n(x)$.

Prenons $a \geq -\ln x$ et calculons $J_n(a, x) = \displaystyle\int_{-\ln x}^{a} f_n(t)dt$.

Par définition $I_n(x) = \lim\limits_{a\to+\infty} J_n(a, x)$.

On a immédiatement

$$\begin{aligned} J_n(a,x) &= \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_{-\ln x}^{a} \\ &= -\frac{e^{-na}}{n} + \frac{e^{n\ln x}}{n} = -\frac{e^{-na}}{n} + \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{e^{-na}}{n} = 0$, donc $\boxed{I_n(x) = \dfrac{x^n}{n}\cdot}$

Remarque : *Cette façon de faire montre (bien-sûr) que l'intégrale $I_n(x)$ converge puisque sa valeur est un nombre réel ; mais il est assez rare que l'on puisse calculer une intégrale pour pouvoir décider si elle converge ou non.*

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.