EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−22

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel **non nul.**

1) Etudier la convergence de l'intégrale

$$I_n(x) = \int_{-\ln x}^{+\infty} e^{-nt} dt.$$

2) Etudier, suivant les valeurs de x, la convergence de la série de terme général $I_n(x)$.

3) On pose

$$J_n(x) = \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-t} dt.$$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J_n(x)$.

(On distinguera les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$).

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = J_n(x)$.

4) On suppose ici que $x \in]0; 1[$.

a) Etudier la fonction g définie sur $[-\ln x, +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

b) Calculer $\displaystyle\int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

Posons $f_n(t) = e^{-nt}$, pour $t \in I = [-\ln x; +\infty[$ et $x > 0$. La fonction f_n est continue, dérivable sur I, comme composée de fonctions continues, dérivables. En effet,

$u : t \longmapsto -nt$ est continue, dérivable sur I ; exp est continue dérivable sur l'intervalle image $u(I)$, puisqu'elle est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\exp \circ u$ est continue, dérivable sur I.

L'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_{-\ln x}^{+\infty} f_n(t)dt$ est impropre en $+\infty$.

Etudions la convergence de $I_n(x)$, puis calculons-la .

- f_n est positive ; d'après les croissances comparées, on a

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_n(t)t^2 = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{(e^t)^n} = 0$. Exprimons ce résultat :

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \ /\ \forall t \geq A,\ |f_n(t)t^2 - 0| \leq \varepsilon.$

Ce qui compte tenu du fait que $f_n(t)t^2 \geq 0$ s'écrit :

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \ /\ \forall t \geq A,\ 0 \leq f_n(t)t^2 \leq \varepsilon.$

Or pour $A > 0, t^2 > 0$; on peut diviser la dernière inégalité par t^2 ;

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \ /\ \forall t \geq A,\ 0 \leq f_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{t^2}\cdot$

Appliquons cette inégalité pour $\varepsilon = 1$; on a

$$\exists\, A > 0 \ /\ \forall t \in [A; +\infty[,\ 0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{t^2}\cdot$$

L'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge d'après le critère de Riemann ; donc par utilisation du théorème de comparaison des fonctions positives, on conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\ln x}^{+\infty} f_n(t)dt$ converge aussi (puisque sur l'intervalle $[-\ln x; A]$, f_n est continue).

Remarque : Nous avons fait la démonstration en détail, car cette situation est fréquente (il faut donc savoir la traiter) et elle utilise un résultat important du cours (les croissances comparées).

- Calcul de $I_n(x)$.

Prenons $a \geq -\ln x$ et calculons $J_n(a,x) = \displaystyle\int_{-\ln x}^{a} f_n(t)dt.$

Par définition $I_n(x) = \displaystyle\lim_{a\to+\infty} J_n(a,x).$

On a immédiatement

$$\begin{aligned} J_n(a,x) &= \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_{-\ln x}^{a} \\ &= -\frac{e^{-na}}{n} + \frac{e^{n\ln x}}{n} = -\frac{e^{-na}}{n} + \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{e^{-na}}{n} = 0$, donc $\boxed{I_n(x) = \frac{x^n}{n}\cdot}$

Remarque : *Cette façon de faire montre (bien-sûr) que l'intégrale $I_n(x)$ converge puisque sa valeur est un nombre réel ; mais il est assez rare que l'on puisse calculer une intégrale pour pouvoir décider si elle converge ou non.*