



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-23

On considère les suites numériques (I_n) et (u_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{n}I_n.$$

- 1) Justifier l'existence de I_n et déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
- 2) Montrer que la suite (u_n) est monotone et étudier sa convergence.
- 3) Pour tout $n \geq 1$, calculer I_n .
- 4) a) En utilisant l'inégalité $\ln(1+x^2) \leq x^2$,
montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx$.
- b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ (On pourra utiliser le résultat suivant : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$).
- c) En déduire une minoration de la suite (u_n) et conclure que la suite (u_n) ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- 5) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha 4^n}{\sqrt{n}}$.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION-1

• La fonction f_n définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue, dérivable sur \mathbb{R} . L'intégrale I_n est donc impropre uniquement en $+\infty$ et $-\infty$. Mais la fonction f_n est paire, donc **l'intégrale I_n converge si et seulement si l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge. Dans ce cas on a $I_n = 2J_n$.**

Or $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}$, dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge **d'après le critère de Riemann** puisque $2n > 1$.

f_n est positive sur $[1, +\infty[$, équivalente en $+\infty$ à une fonction dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge ; les résultats sur les équivalents de fonctions positives permettent de conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, donc l'intégrale J_n converge car sur $[0, 1]$ f_n est continue.

• Soit $y \geq 0$; posons $J_n(y) = \int_0^y f_n(t)dt$. On a alors $\lim_{y \rightarrow +\infty} J_n(y) = J_n$.

Trouvons une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1} .

Intégrons $J_n(y)$ par parties :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^n} & ; & \quad u'(x) = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \\ v'(x) &= 1 & ; & \quad v(x) = x. \end{aligned}$$

u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[0; y]$.

$$\begin{aligned} J_n(y) &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^y + 2n \int_0^y \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int_0^y \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int_0^y \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \left(\int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \left(J_n(y) - J_{n+1}(y) \right) \end{aligned}$$

En prenant la limite quand $y \rightarrow +\infty$, on obtient la relation : $J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$, soit $J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n$. En multipliant par 2 :

$$\forall n \geq 1, I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

QUESTION-2

Remarquons que $I_n > 0$, car $\frac{1}{(1+x^2)^n} > 0$ et les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ; donc $u_n > 0$.

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.