



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-24

1) Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série de terme général $u_n(x) = \frac{1}{n + n^2x^2}$ est convergente.

On note $f(x)$ sa somme c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2x^2}$.

2) a) Montrer que f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

b) On note $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2x^2}$.

Montrer que $I(x)$ existe et que

$$\forall x > 0, I(x) \leq f(x) \leq I(x) + \frac{1}{1 + x^2}.$$

3) a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$:

$$\frac{1}{t(1 + tx^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1 + tx^2}.$$

b) Calculer $I(x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

4) Soit $x_0 > 0$.

a) Montrer que :

$$\forall x > 0, |f(x) - f(x_0)| \leq |x^2 - x_0^2| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2}{n + n^2x^2} \right) \left(\frac{1}{n + n^2x_0^2} \right).$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x^2 - x_0^2|}{x^2} f(x_0).$$

c) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION-1

$\sum u_n(x)$ est une série à termes positifs.

Comme $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \frac{1}{n^2}$.

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une **série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$** ; donc la série $\sum \frac{1}{x^2} \frac{1}{n^2}$ est convergente et d'après la règle d'équivalence des séries positives équivalentes,

la série $\sum u_n(x)$ est convergente pour $x \neq 0$.

QUESTION-2

a)

f est la somme de fonctions décroissantes, donc elle est décroissante.

b)

- Pour $t \geq 1$, $\frac{1}{t + x^2 t^2} \geq 0$.

Comme $x^2 \neq 0$, $\frac{1}{t + x^2 t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \frac{1}{t^2}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème des équivalents de fonctions positives on conclut que

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + x^2 t^2}$ est convergente.

- Soit $n \geq 1$. Pour $t \in [n; n+1]$, on a
 $n \leq t \leq n+1$.

(a)

On élève au carré car **les nombres sont positifs** ;

$n^2 \leq t^2 \leq (n+1)^2$. On multiplie par x^2 **qui est positif** ;
 $x^2 n^2 \leq x^2 t^2 \leq x^2 (n+1)^2$.

(b)

On ajoute les inégalités (a) et (b).

$$0 < n + x^2 n^2 \leq t + x^2 t^2 \leq n + 1 + x^2 (n+1)^2.$$

Comme il s'agit de **nombres strictement positifs** on peut passer aux inverses :

$$\frac{1}{n + 1 + x^2 (n+1)^2} \leq \frac{1}{t + x^2 t^2} \leq \frac{1}{n + x^2 n^2}.$$

Intégrons entre n et $n+1$ (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{n + 1 + x^2 (n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t + x^2 t^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n + x^2 n^2}. \text{ Soit}$$

$$\frac{1}{n + 1 + x^2 (n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t + x^2 t^2} \leq \frac{1}{n + x^2 n^2}.$$