edhec
School of Management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 30 Avril 2002, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(Y = k) = (k \leq X < k+1)$.

1) a. Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.
   c. En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   d. Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

2) On pose $Z = X - Y$.
   a. Déterminer $Z(\Omega)$.
   b. En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[,\ P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

   c. En déduire une densité f de Z.
   d. Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.

On lance n fois une pièce de monnaie donnant *"pile"* avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et *"face"* avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k-chaîne de *"pile"* une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné *"pile"*, cette suite devant être suivie d'un *"face"* ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de *"pile"* obtenues au cours de ces n lancers.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement « on obtient *"pile"* au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

1) Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.

2) Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.

3) Dans cette question, k désigne un entier de $[\![1, n-2]\!]$.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de *"pile"* commence au $i^{\text{ème}}$ lancer et qui vaut 0 sinon.

a. Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.

b. Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.

c. Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.

d. Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{-x \ln x}{1 + x^2} \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1) a. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier le signe de $f(x)$.

2) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

3) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.

a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \dfrac{-x\,h(x)}{1 + x^2}$.

b. Étudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq -0{,}48$).

c. En déduire le signe de $g(x)$.

4) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

a. Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

1) a. Montrer que E est un espace vectoriel.
   b. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
   c. Donner la dimension de E.

2) a. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et K^3 appartiennent à E.
   b. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
   c. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

3) a. Montrer que L est diagonalisable.
   b. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4) On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   b. Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et de $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant elles le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

1) a. Écrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i \ / \ X_n = j)$.
   b. Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

2) a. Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer $A\,u_i$. En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter D et P.

b. Calculer P^2 puis en déduire P^{-1}.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

a. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = A\,C_n$.

b. En déduire que $C_n = \frac{1}{4} PD^n PC_0$, puis donner la loi de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

EDHEC

CORRIGE

EXERCICE 1

QUESTION–1

a. Rappelons qu'une densité g de la variable X est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

g étant nulle sur $\mathbb{R}_-$, on peut dire que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $[X] \in \mathbb{N}$.

Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = k-1) &= P(k-1 \leq X < k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_{k-1}^{k} = -e^{-\lambda k} + e^{-\lambda(k-1)} \\ &= -e^{-\lambda(k-1)-\lambda} + e^{-\lambda(k-1)} = -e^{-\lambda} e^{-\lambda(k-1)} + e^{-\lambda(k-1)} \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = k-1) = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda(k-1)}.$$

c. Notons Ω l'univers sur lequel X et Y sont définies.

$Y(\Omega) = \mathbb{N} \iff (Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y+1 = k) &= P(Y = k-1) \\ &= (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda(k-1)} \quad \text{d'après b)} \\ &= (1 - e^{-\lambda}) \left(e^{-\lambda} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

Or $\lambda > 0$, donc $0 < e^{-\lambda} < 1$ et par suite $0 < 1 - e^{-\lambda} < 1$. Si l'on pose $p = 1 - e^{-\lambda}$ et $q = 1 - p$, on peut écrire : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y+1 = k) = q^{k-1} p$

La variable $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.

d. D'après le cours et avec les notations précédentes,

$$E(Y+1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \text{ et } V(Y+1) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}.$$

Par linéarité de l'espérance, $E(Y+1) = E(Y) + 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$, donc

$$E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

On sait que $V(Y+1)=V(Y)$, donc $\boxed{V(Y)=\dfrac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.}$

QUESTION–2

a. $\forall x\in\mathbb{R},\ [x]\leq x<[x]+1$, par définition de la partie entière. Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leq x-[x]<1$. Par suite $0\leq X-[X]<1$, c'est-à-dire $0\leq Z<1$. Or X peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}_+^*$, donc $X-[X]$ peut prendre toutes les valeurs de $[0;1[$.

$$\boxed{Z(\Omega)=[0;1[.}$$

b. Pour tout $x\in[0;1[$, l'événement $(Z\leq x)$ est égal à l'événement $(0\leq X-[X]\leq x)$ c'est-à-dire (en ajoutant $[X]=Y$ au trois termes de l'encadrement) à $(Y\leq X\leq Y+x)$. C'est donc, en utilisant le système complet d'événements $\{(Y=k)\ /\ k\in\mathbb{N}\}$, la réunion des événements deux à deux incompatibles :

$$(Z\leq x)=\bigcup_{k=0}^{+\infty}(Y=k)\cap(k\leq X\leq k+x). \qquad \textbf{(I)}$$

Puisque $x<1$, $(k\leq X\leq k+x)\subset(k\leq X<k+1)$. Or il n'existe qu'un seul entier vérifiant cet encadrement, c'est $[X]$, c'est-à-dire Y, et par conséquent : $(k\leq X\leq k+x)\Longrightarrow(Y=k)$, ce qui se traduit aussi par $(k\leq X\leq k+x)\subset(Y=k)$, donc on a bien

$$(k\leq X\leq k+x)\cap(Y=k)=(k\leq X\leq k+x)$$

L'égalité **(I)** devient alors

$(Z\leq x)=\bigcup_{k=0}^{+\infty}(k\leq X\leq k+x)$. Les événements $(k\leq X\leq k+x)$ sont deux à deux incompatibles (puisqu'ils sont égaux aux événements $(Y=k)\cap(k\leq X\leq k+x)$ qui le sont). On obtient donc :

$$\begin{aligned}P(Z\leq x)&=\sum_{k=0}^{+\infty}P(k\leq X<k+x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+x}\lambda e^{-\lambda t}dt\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}(-e^{-\lambda(k+x)}+e^{-\lambda k})=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x})\\&=(1-e^{-\lambda x})\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda k}=(1-e^{-\lambda x})\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^k\end{aligned}$$

On reconnaît la somme de la série géométrique de raison $e^{-\lambda}$ et de premier terme 1 ; cette série converge puisque sa raison $e^{-\lambda}$ appartient à $]0;1[$ et sa somme vaut $\dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$.

$$\boxed{\forall x\in[0;1[,\ P(Z\leq x)=\frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}.}$$

c. Soit F la fonction de répartition de Z.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } 0\leq x<1 \text{ d'après le b)}\\ 1 & \text{si } x\geq 1.\end{cases}$$

La fonction F est continue, dérivable sur $]-\infty;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Nous prendrons donc pour densité f de Y : $f(x)=F'(x)$ sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ et par exemple $f(0)=f(1)=0$; cela donne donc

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \text{ et } f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} \text{ si } 0 < x < 1.}$$

d. L'espérance $E(Z)$ existe car l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 t\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}dt$ d'une part et, d'autre part, la fonction $t \longmapsto t\dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$.

$$E(Z) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 te^{-\lambda t}dt.$$

Posons $u(t) = t$; $u'(t) = 1$; $v'(t) = e^{-\lambda t}$; $v(t) = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\Big(\big[-\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda} \big]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 e^{-\lambda t}dt \Big) \\ &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\Big(-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\big[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \big]_0^1 \Big) \\ &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\Big(-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \Big). \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\lambda})}\Big(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}\Big)}$$

Ce résultat était prévisible. En effet, $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (c'est un résultat du cours) et on a établi que $E(Y) = \dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$. Or $Z = X - Y$, donc par linéarité de l'espérance $E(Z) = E(X) - E(Y)$, soit

$E(Z) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \dfrac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}{\lambda(1 - e^{-\lambda})}$ après avoir réduit au même dénominateur. C'est bien le résultat précédent.

EXERCICE 2

QUESTION–1

Au cours de n lancers, il ne peut y avoir au plus qu'une n–chaîne : c'est celle qui correspondant aux tirages de n " pile ". La variable Y_n prend donc deux valeurs : 0 ou 1. $\boxed{Y_n(\Omega) = \{0, 1\}}$.

Nous pouvons noter que la variable Y_n **est une variable de Bernoulli.**

L'événement $(Y_n = 1)$ est l'événement : au cours des n lancers on a obtenu n " pile " ; l'événement $(Y_n = 0)$ est l'événement contraire, c'est-à-dire : au cours des n lancers on a obtenu au moins une " face ".

Notons pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, P_k l'événement : on a obtenu " pile " au $k^{\text{ème}}$ lancer et F_k l'événement : on a obtenu " face " au $k^{\text{ème}}$ lancer.

$(Y_n = 1) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} P_k$; les lancers sont indépendants et pour tout k dans l'intervalle $[\![1;n]\!]$, $P(P_k) = p$, donc $\boxed{P(Y_n = 1) = p^n.}$

$$\boxed{Y_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } p^n : E(Y_n) = p^n.}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.