EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a. Calculer K^2.

b. En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.

c. Montrer que la matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.

a. Montrer : $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.

b. En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.

c. *Application :* donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

E.M.LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Industrie de Lyon

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

c. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

d. Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1}.

EXERCICE 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. *Étude des fonctions polynomiales P_n*

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}, \text{ où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4.a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right).$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2.$$

6. Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

II. *Limite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1\,;+\infty[$:

$$t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 3

1. *Étude préliminaire*

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, que la série $\sum_{n\geqslant k} C_n^k x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

a. Vérifier, pour tout réel x de $[0\,;1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

b. Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tel que $k < n$, montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

c. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

d. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;1[,\quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

2. *Étude d'une expérience aléatoire*

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X = k \ / \ N = n)$.

c. Vérifier : $\mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.

d. En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

e. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.

f. Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

3. *Étude d'une variable aléatoire à densité*

On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a\,;\, +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}$.

a. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y.

b. Déterminer une densité f de Y.

c. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}$.

d. Montrer que Y admet une espérance $\mathrm{E}(Y)$ et calculer $\mathrm{E}(Y)$.

- FIN -

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

EM LYON

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION–1

a). Un calcul sans difficultés donne $\boxed{K^2 = -I}$

b). On déduit de là que : $K(-K) = (-K)K = I$, donc

$$\boxed{K \text{ est inversible et } K^{-1} = -K.}$$

c). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une valeur propre réelle λ ; alors **par définition** il existe une colonne $X \neq (0) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $KX = \lambda X$. Multiplions cette égalité à gauche par K, on obtient :

$K(KX) = K(\lambda X)$, soit $K^2X = \lambda KX$, ou $-IX = \lambda^2 X$, soit finalement $\lambda^2 X = -X$; comme $X \neq (0)$, on sait que cette égalité équivaut à $\lambda^2 = -1$. **Cette équation n'a pas de solution réelle** (car il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit strictement négatif) . On aboutit donc à une absurdité : si λ est une valeur propre réelle de K, alors on doit avoir $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{La matrice } K \text{ n'admet aucune valeur propre réelle.}}$$

Remarque : une autre façon de raisonner. Puisque $K^2 = -I$, alors $K^2 + I = (0)$. Cela veut dire que le polynôme $P = X^2 + 1$, qui n'est pas le polynôme nul, est annulateur de K. On sait, d'après le cours, que si K admet une valeur propre réelle, celle-ci est **nécessairement** racine de P. Or il est visible que P n'a pas de racines réelles car, pour tout réel x : $P(x) \geq 1 > 0$. La conclusion est que K n'a pas de valeurs propres réelles.

QUESTION–2

a). $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + 2abIK + b^2K^2$ puisque I et K **commutent**, soit $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK$, et comme $bK = M - aI$, on obtient $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI)$, soit finalement :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM.}$$

b). Cette dernière égalité s'écrit aussi $M(-M + 2aI) = (-M + 2aI)M = (a^2 + b^2)I$. Or $(a,b) \neq (0,0)$, donc $(a^2 + b^2) \neq 0$, ce qui permet de diviser par $a^2 + b^2$ et on a : $M\Big(\frac{1}{a^2+b^2}(-M + 2aI)\Big) = \Big(\frac{1}{a^2+b^2}(-M + 2aI)\Big)M = I$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autrement que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

La matrice M est inversible pour tous réels a et b tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $M^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}(-M+2aI)$.

Remarque : Pour montrer l'inversibilité d'une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, nous sommes revenus à la définition, à savoir il existe une matrice $B' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $BB' = B'B = I$. On aurait pu se dispenser de vérifier les deux égalités car le lecteur sait certainement que grâce au théorème du rang il suffit d'avoir $BB' = I$ pour pouvoir affirmer que B est inversible et que $B^{-1} = B'$.

c). On a $M = \sqrt{2}I + K$; c'est le cas particulier $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$. On peut affirmer compte tenu du **b)** que M est inversible et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{3}(-M + 2\sqrt{2}I)}$

$$\text{Sous forme matricielle } M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2} & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1+2\sqrt{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

QUESTION–3

a). On a $v_1 = (1,0,0,0),\ v_2 = (1,1,0,1),\ v_3 = (0,0,1,0),\ v_4 = (-1,1,0,0)$

Ecrivons la matrice P des coordonnées en colonnes de ces 4 vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et effectuons $L_4 \longleftarrow L_4 - L_2$, il vient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice triangulaire dont aucun terme diagonal n'est nul :

La matrice P est inversible et par suite, c'est un résultat du cours, les vecteurs $v_1,\ v_2,\ v_3$ et v_4 forment une base de $\mathbb{R}^4$.

b). Les calculs sont sans difficultés, ils se font matriciellement : soit $u \in \mathbb{R}^4$ et U la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans cette même base est U' donnée par $U' = KU$. On obtient

$f(v_1) = (1,1,0,1) = v_2$
$f(v_2) = f(f(v_1)) = -v_1$ car $K^2 = -I \iff f^2 = -\,\mathrm{Id}$
$f(v_3) = (-1,1,0,0) = v_4$
$f(v_4) = f(f(v_3)) = -v_3$.

Par **définition** de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée,

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c). Nous avons répondu à cette question dans le **a)** : pour mémoire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d). La matrice K' est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) et K est la matrice de f dans la base canonique, donc d'après la **formule de changement de base pour les matrices** $\boxed{K' = P^{-1}KP}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.