

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option économique)



Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a. Calculer K^2 .
- b. En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1} .
- c. Montrer que la matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.
2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.
 - a. Montrer : $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.
 - b. En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M .
 - c. Application : donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 , et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 associé à la matrice K relativement à la base \mathcal{B} . On considère les quatre éléments suivants de \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

- Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- Exprimer $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base \mathcal{C} .
- Déterminer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
- Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1} .

EXERCICE 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}, \quad \text{où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4. a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

6. Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1; +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 3

1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0; 1[$, que la série $\sum_{n \geq k} C_n^k x^n$ est

convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

- a. Vérifier, pour tout réel x de $[0; 1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

- b. Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tel que $k < n$, montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

- c. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0; 1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

- d. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n , on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire N . Donner son espérance.
- Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k / N = n)$.
- Vérifier : $P(X = 0) = \frac{4}{9}$.
- En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

- Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
- Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k$.

3. Étude d'une variable aléatoire à densité

On note $a = -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a; +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

- Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y .
- Déterminer une densité f de Y .
- Déterminer une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}}$.
- Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et calculer $E(Y)$.

- FIN -



ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2002

EM LYON

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION-1

a). Un calcul sans difficultés donne $K^2 = -I$

b). On déduit de là que : $K(-K) = (-K)K = I$, donc

$$K \text{ est inversible et } K^{-1} = -K.$$

c). **Raisonnons par l'absurde** et supposons qu'il existe une valeur propre réelle λ ; alors **par définition** il existe une colonne $X \neq (0) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $KX = \lambda X$. Multiplions cette égalité à gauche par K , on obtient :

$K(KX) = K(\lambda X)$, soit $K^2X = \lambda KX$, ou $-IX = \lambda^2 X$, soit finalement $\lambda^2 X = -X$; comme $X \neq (0)$, on sait que cette égalité équivaut à $\lambda^2 = -1$. **Cette équation n'a pas de solution réelle** (car il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit strictement négatif). On aboutit donc à une absurdité : si λ est une valeur propre réelle de K , alors on doit avoir $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible.

La matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.

Remarque : une autre façon de raisonner. Puisque $K^2 = -I$, alors $K^2 + I = (0)$. Cela veut dire que le polynôme $P = X^2 + 1$, qui n'est pas le polynôme nul, est annulateur de K . On sait, d'après le cours, que si K admet une valeur propre réelle, celle-ci est **nécessairement** racine de P . Or il est visible que P n'a pas de racines réelles car, pour tout réel x : $P(x) \geq 1 > 0$. La conclusion est que K n'a pas de valeurs propres réelles.

QUESTION-2

a). $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + 2abIK + b^2K^2$ puisque I et K **commutent**, soit $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK$, et comme $bK = M - aI$, on obtient $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI)$, soit finalement :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM.$$

b). Cette dernière égalité s'écrit aussi $M(-M + 2aI) = (-M + 2aI)M = (a^2 + b^2)I$. Or $(a, b) \neq (0, 0)$, donc $(a^2 + b^2) \neq 0$, ce qui permet de diviser par $a^2 + b^2$ et on a : $M\left(\frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)\right) = \left(\frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)\right)M = I$.

La matrice M est inversible pour tous réels a et b tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)$.

Remarque : Pour montrer l'inversibilité d'une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, nous sommes revenus à la définition, à savoir il existe une matrice $B' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $BB' = B'B = I$. On aurait pu se dispenser de vérifier les deux égalités car le lecteur sait certainement que grâce au théorème du rang il suffit d'avoir $BB' = I$ pour pouvoir affirmer que B est inversible et que $B^{-1} = B'$.

c). On a $M = \sqrt{2}I + K$; c'est le cas particulier $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$. On peut affirmer compte tenu du b) que M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(-M + 2\sqrt{2}I)$$

Sous forme matricielle $M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 + 2\sqrt{2} & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 + 2\sqrt{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

QUESTION-3

a). On a $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$, $v_4 = (-1, 1, 0, 0)$

Ecrivons la matrice P des coordonnées en colonnes de ces 4 vecteurs dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et effectuons } L_4 \leftarrow L_4 - L_2, \text{ il vient } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ C'est une}$$

matrice triangulaire dont aucun terme diagonal n'est nul :

La matrice P est inversible et par suite, c'est un résultat du cours, les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 forment une base de \mathbb{R}^4 .

b). Les calculs sont sans difficultés, ils se font matriciellement : soit $u \in \mathbb{R}^4$ et U la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^4 , alors la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans cette même base est U' donnée par $U' = KU$. On obtient

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1, 1, 0, 1) = v_2 \\ f(v_2) &= f(f(v_1)) = -v_1 \quad \text{car } K^2 = -I \iff f^2 = -\text{Id} \\ f(v_3) &= (-1, 1, 0, 0) = v_4 \\ f(v_4) &= f(f(v_3)) = -v_3. \end{aligned}$$

Par **définition** de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée,

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c). Nous avons répondu à cette question dans le a) : pour mémoire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d). La matrice K' est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) et K est la matrice de f dans la base canonique, donc d'après la **formule de changement de base**

pour les matrices $K' = P^{-1}KP$