CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mardi 14 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

On désigne par I, O, J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. a) Écrire la matrice A comme combinaison linéaire des matrices I et J, puis la matrice J comme combinaison linéaire des matrices A et I.

b) Exprimer J^2 en fonction de J et en déduire que la matrice A vérifie l'égalité $A^2 + 5A + 4I = O$.

c) Montrer que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction des matrices I et J.

2. a) Soit U la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel JU.

En déduire une valeur propre de la matrice J.

b) Montrer que 0 est valeur propre de J et donner une base du sous-espace propre associé.

c) La matrice J est-elle inversible ? La matrice J est-elle diagonalisable ?

3. a) Soit X une matrice-colonne non nulle à trois éléments et λ un réel vérifiant $JX = \lambda X$. Montrer qu'il existe un réel μ que l'on donnera en fonction de λ vérifiant $AX = \mu X$.

b) En déduire que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont -1 et -4.

c) Sans expliciter la matrice A^{-1}, calculer ses valeurs propres et montrer qu'elle est diagonalisable.

4. Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

b) Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

c) Calculer, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre : $G_a(x, y) = F_a(x, y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$ et préciser son signe.

d) En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur notée $M(a)$.

e) Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

PROBLÈME

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie 1 : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.

b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

c) pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

2. Programmation

Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0, w_1, \ldots, w_n$.

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.
La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, elle aussi, vers 0.

d) Soit b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $b * v$ est convergente et de limite nulle.

Partie 2 : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$.

a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a ?

c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$. Montrer que la suite $b * \varepsilon$ converge vers 0.

d) On désigne par d la suite $b * \varepsilon$.

Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie 3 : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Résultats préliminaires

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on désigne par S leur somme.

a) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \mathbf{P}([X = n])$ et $v_n = \mathbf{P}([Y = n])$.
Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S = n]) = w_n$, ($w$ étant la suite définie à partir des suites u et v en tête du problème).

b) Retrouver alors le résultat de la question **1.c)** de la **Partie 1** par un choix adéquat des lois de X et de Y.

c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n, la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z = n]$ est réalisé. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance donnée par :

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}([Z = n])\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y} ?
En déduire l'égalité : $r(S) = r(X)\,r(Y)$.

e) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par : $S_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i$. Établir l'égalité : $r(S_q) = (r(X_1))^q$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

2. Une formule sommatoire

a) Montrer que les égalités : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Z=n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

b) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable :

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$$

En admettant, pour tout entier naturel non nul q, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{k+q}^{q} = C_{n+q+1}^{q+1}$, montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S_q=n]) = C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3. Un exemple concret

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question **2.a)** représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z=n]$.

b) À l'aide de la formule obtenue en **2.c**, montrer que la loi de F est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([F=n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

c) Justifier l'existence des espérances $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{E}(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité : $\mathrm{E}(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

ESCP-EAP MATH III

CORRIGE

EXERCICE

QUESTION–1.

a) On a facilement $\boxed{A = J - 4I, \text{ soit } J = A + 4I}$

b) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{J^2 = 3J.}$$

Ceci signifie que $(A + 4I)^2 = 3(A + 4I)$. **Mais A et I commutent, on peut développer $(A+4I)^2$ par le binôme de Newton.**

$(A + 4I)^2 = A^2 + 8A + 16I$ (car $AI = IA = I$ et $I^2 = I$.) On obtient donc la relation : $A^2 + 8A + 16I = 3(A + 4I) = 3A + 12I$, soit

$$\boxed{A^2 + 5A + 4I = (0).}$$

c) L'égalité précédente s'écrit aussi : $A(A+5I) = -4I$, soit encore $A\Big(-\frac{1}{4}(A+5I)\Big) = I$.

$$\boxed{\text{Ceci prouve que } A \text{ est inversible et on a : } A^{-1} = -\frac{1}{4}(A+5I).}$$

Remarque et rappel de cours. : On aurait pu - ou on aurait dû - vérifier que $\Big(-\frac{1}{4}(A+5I)\Big)A = I$ pour satisfaire à la définition de matrice inversible, à savoir : une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I$.

On peut s'en dispenser. En effet, supposons que l'on ait seulement l'égalité $AB = I$ et notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés aux matrices A et B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'égalité $AB = I$ équivaut à $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. **Alors g est injective ;** en effet, considérons un vecteur u du noyau de g $(g(u) = 0)$ et appliquons f à cette égalité ; il vient $f(g(u)) = f(0) = 0$ puisque f est linéaire et d'autre part $f(g(u)) = (f \circ g)(u) = u$ d'après la relation vérifiée par f et g. Il s'ensuit que $u = 0$.

Conclusion : g est injective et, puisque g est un endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension finie, on conclut que g est **bijective**. Composons alors l'égalité $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ par g^{-1} à droite, il vient $f \circ g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ g^{-1}$, soit $f = g^{-1}$ (ou encore $g = f^{-1}$). Ce qui prouve bien que f est bijective (puisque g^{-1} l'est). Traduisons ce résultat sur les matrices : A est inversible et $B = A^{-1}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Remarque : On peut aussi considérer A et B comme les matrices d'endomorphismes f et g de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ rapporté à sa base canonique. C'est ce que nous ferons dans la question suivante.

QUESTION–2.

a) Un calcul immédiat donne : $\boxed{JU = 3U.}$ Or $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc

Le réel 3 est valeur propre de J, le vecteur U étant un vecteur propre associé.

b) Considérons, comme nous l'avons annoncé plus haut, que J est la matrice d'un endomorphisme j de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ rapporté à sa base canonique E_1, E_2, E_3. D'après la matrice J, on a $JE_1 = JE_2 = JE_3 = E_1 + E_2 + E_3$

où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On déduit que $JE_1 - JE_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $J(E_1 - E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par définition, la matrice colonne $E_1 - E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une colonne propre associée à la valeur propre 0. De même $J(E_1 - E_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui indique que la matrice colonne $E_1 - E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une colonne propre associée à la valeur propre 0.

Le sous-espace propre $E(0, J)$ de J associé à la valeur propre 0 contient déjà les deux vecteurs $E_1 - E_2$ et $E_1 - E_3$ qui ne sont visiblement pas colinéaires (ou non proportionnels) et forment donc une famille libre. Ceci permet d'affirmer que $\dim E(0, J) \geq 2$.

D'autre part, on a vu à la question 2–a) que 3 était valeur propre de J, donc $\dim E(3, J) \geq 1$. Or on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe, ce qui implique que la somme de leurs dimensions est inférieure ou égale à $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, laquelle vaut 3. On a donc l'encadrement suivant :

$$1 + 2 \leq \dim(0, J) + \dim E(3, J) \leq 3.$$

Il en résulte que : $\dim E(0, J) + \dim E(3, J) = 3$.

Conclusion : $\dim E(0, J) = 2$ et $(E_1 - E_2, E_1 - E_3)$ en est une base.

c) La matrice J n'est pas inversible puisque 0 est valeur propre de J.

Remarque : Ce résultat était prévisible car les lignes de J sont égales, et le système dont la matrice est J n'est donc pas de Cramer (en effectuant les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ on obtient une matrice triangulaire supérieure dont deux termes diagonaux sont nuls).

On aurait pu dire aussi que les colonnes de J étaient égales, donc $j(E_1) = j(E_2) = j(E_3)$, ce qui prouve que j n'est pas injective, donc sa matrice J n'est pas inversible.

L'égalité $\dim E(0, J) + \dim E(3, J) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$ prouve que J possède deux valeurs propres 0 et 3, et la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité est satisfaite : La matrice J est diagonalisable.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Remarque : ce résultat était également prévisible puisque la matrice J est symétrique réelle (cette condition, rappelons-le, est une condition **suffisante** de diagonalisabilité).

QUESTION–3.

a) Soit $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ telle que $JX = \lambda X$. Cela signifie que λ est valeur propre de J et que X est un vecteur propre associé. Or $JX = \lambda X$ équivaut, d'après 1–a) à $(A+4I)X = \lambda X$, soit encore à :

$$AX = (\lambda - 4)X.$$

Conclusion : λ est valeur propre de J si et seulement si $\lambda - 4$ est valeur propre de A

b) d'après le a), **les valeurs propres de A sont** $3-4=-1$ **et** $0-4=-4$.

Toujours d'après le a), X est vecteur propre de J associé à la valeur propre λ si et seulement si X est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda - 4$. Notons $E(-4, A)$ et $E(-1, A)$ les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres -4 et -1. On peut, d'après ce qui précède, dire que :

$$E(-4, A) = E(0, J) = \text{vect}(E_1 - E_2, E_1 - E_3) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E(-1, A) = E(3, J) = \text{vect}(E_1 + E_2 + E_3) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim E(-4, A) + \dim E(-1, A) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$: A est diagonalisable.

Remarque : ce résultat était également prévisible car A est une matrice symétrique réelle.

c) Soit X une colonne propre de A associée à la valeur propre μ, on a $AX = \mu X$; cette égalité équivaut à $X = A^{-1}(\mu X) = \mu A^{-1}X$ (en effet, on passe de l'égalité $AX = \mu X$ à l'égalité $X = A^{-1}(\mu X)$ en multipliant à gauche par A^{-1} et l'on passe de l'égalité $X = A^{-1}(\mu X)$ à $AX = \mu X$ en multipliant à gauche par A). D'autre part, la matrice A est inversible ce qui équivaut à dire que 0 **n'est pas valeur propre de** A. Dans ces conditions, l'égalité $X = \mu A^{-1}X$ équivaut à $A^{-1}X = \frac{1}{\mu}X$.

Conclusion : $AX = \mu X \iff A^{-1}X = \frac{1}{\mu}X$. Et puisque X n'est pas nulle, on peut énoncer : μ est valeur propre de A si et seulement si $\frac{1}{\mu}$ est valeur propre de A^{-1}.

Les valeurs propres de A^{-1} sont donc $\frac{1}{-1} = -1$ et $\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

Remarquons, d'après les calculs précédents que :

$X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \mu X$ équivaut à $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1}X = \frac{1}{\mu}X$. Ceci veut dire que X est vecteur propre de A associé à la valeur propre μ si et seulement si X est vecteur propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\mu}$. Si l'on note $E(\frac{1}{\mu}, A^{-1})$ le sous-espace propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\mu}$, on a :

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

$$X \in E(\mu, A) \Longleftrightarrow X \in E(\frac{1}{\mu}, A^{-1}).$$
$$E(-1, A^{-1}) = E(-1, A) \text{ et } E(-\frac{1}{4}, A^{-1}) = E(-4, A).$$

Or $\dim E(-4, A) + \dim E(-1, A) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$,
donc $\dim E(-\frac{1}{4}, A^{-1}) + \dim E(-1, A^{-1}) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$.
La matrice A^{-1} est diagonalisable.

QUESTION–4.

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3x+y+a \\ x-3y+a \\ x+y-3a \end{pmatrix}$$

$$F_a(x,y) = -3x^2 - 3y^2 - 3a^2 + 2xy + 2ax + 2ay.$$

F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ car c'est un polynôme.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F_a}{\partial x}(x,y) = -6x + 2y + 2a \text{ et } \frac{\partial F_a}{\partial y}(x,y) = -6y + 2x + 2a.$$

b) Le couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est donc solution du système : $\begin{cases} \frac{\partial F_a}{\partial x}(x_0,y_0) &= 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial y}(x_0,y_0) &= 0 \end{cases}$

Ce système équivaut successivement à :

$\begin{cases} -6x_0 + 2y_0 + 2a &= 0 \\ -6y_0 + 2x_0 + 2a &= 0 \end{cases}$ puis à $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + a &= 0 \\ -3y_0 + x_0 + a &= 0 \end{cases}$

Effectuons $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, il vient $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + a &= 0 \\ 4(x_0 - y_0) &= 0 \end{cases}$

Ce qui donne immédiatement $x_0 = y_0 = \frac{a}{2}$.

Un calcul sans difficulté donnera : $F_a(x_0, y_0) = F_a(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = -2a^2$.

c) Rappelons une formule que nous utiliserons ici : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} G_a(x,y) &= F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2 \\ &= -3x^2 - 3y^2 - 3a^2 + 2xy + 2ax + 2ay \\ &\qquad + \frac{1}{3}(9x^2 + y^2 + a^2 - 6xy - 6ax + 2ay) + 2a^2 \\ &= -\frac{8}{3}y^2 - \frac{2}{3}a^2 + \frac{8}{3}ay \\ &= -\frac{2}{3}(4y^2 - 4ay + a^2) \end{aligned}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ G_a(x,y) = -\frac{2}{3}(2y - a)^2$;
il en résulte que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ G_a(x,y) \leq 0$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.