BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

$1^{\text{ère}}$ épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 2010 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Définitions et notations

- p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.
- On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i,j) \in \{1,...,p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j.
- On note, pour toute matrice-ligne L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1,...,p\}$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j.
- On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, et on note $A_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A$, si et seulement si : $\forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2,\ \ (A_n)_{i,j} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$.
- On dit qu'une suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, et on note $L_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L$, si et seulement si : $\forall j \in \{1,...,p\},\ \ (L_n)_j \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (L)_j$.
- On admet que, si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice B, alors la suite $(A_nB_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice AB.
- On admet que si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite $(LA_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice LA.

• On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, & (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1,...,p\}, & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$

et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

1. a. On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, & (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.

3. On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

(i) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$;

(ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».

4. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.

On note i un élément de $\{1,...,p\}$ tel que : $\forall k \in \{1,...,p\}, \ |x_k| \leqslant |x_i|$.

a. Montrer : $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.

b. En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = \mathrm{I}_p$.

1. a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie **II**, on suppose qu'il existe $r \in \{1,...,p-1\}$, $P \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et distincts de 1 si $i \geqslant r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leqslant 1$: $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

3. Montrer : $M_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \Delta$ et en déduire : $B_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} B$.

4. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p$.

b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.
À chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathbf{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: $L_n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_n = 1) & \mathrm{P}(X_n = 2) & \mathrm{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.
On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad (A)_{i,j} = \mathrm{P}_{(X_0 = i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad \mathrm{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \mathrm{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = L_n A$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie **I.3**, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1}.

4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n \geqslant 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n \geqslant 1}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n \geqslant 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie I : Éléments d'étude de f

1. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

3. Montrer : $\forall x \in J,\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$, et en déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. **a.** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\quad \forall t \in]0\,;1],\quad \left(\, x \leqslant y \implies t^x \geqslant t^y \,\right)$.

b. En déduire que f est décroissante sur J.

5. Montrer : $\forall x \in J,\quad f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

6. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

7. Soit $x \in J$.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

b. En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

8. **a.** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \left|\dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y}\right| \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x,y) \in J^2,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} + \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

b. En déduire que f est continue sur J.

9. Montrer : $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe C^2 de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

1. Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \left|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\,g_k'(x)\right| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

2. **a.** Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

b. En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x \in J,\quad f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

c. Déterminer $f'(0)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0{,}69$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2010

EM-LYON OPTION SCIENTIFIQUE

CORRIGE

PROBLEME I

Partie I : résultats généraux sur les matrices stochastiques - illustrations

1–a)

- Soit $A \in ST_p$; $\forall i \in [\![1, p]\!],\ AV_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A_{i,j} \times 1 = 1 = V_i$. Donc $AV = V$ et par hypothèse $\forall (i,j) \in ([\![1;p]\!])^2,\ A_{i,j} \geq 0$.
- Réciproquement $AV = V \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A_{i,j} = 1$, donc $A \in ST_p$ car les $A_{i,j}$ sont ≥ 0.

$$\boxed{\text{Soit } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).\ A \in ST_p \iff AV = V \text{ et } \forall (i,j) \in ([\![1;p]\!])^2,\ A_{i,j} \geq 0}$$

1–b)

Le résultat précédent montre que $1 \in \text{spect}(A)$ et V est un vecteur propre associé.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Toutes les matrices de } ST_p \text{ admettent } 1 \text{ pour valeur} \\ \text{propre et } V \text{ pour vecteur propre associé}\end{array}}$$

2)

Soit $(A, B) \in (ST_p)^2$.

$(AB)V = A(BV) = AV = V$. De plus $\forall (i,j) \in ([\![1;p]\!])^2,\ (AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j} \geq 0$.

$$\boxed{\forall (A, B) \in (ST_p)^2,\ AB \in ST_p}$$

3–a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} ;\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} ;\ A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$A_1 \in ST_3$, admet trois valeurs propres réelles : elle est diagonalisable. Les trois sous-espaces propres sont de dimension 1. En particulier celui associé à la valeur propre 1.

3–b)

Notons $E(A,\lambda)$ le sous-espace propre d'une matrice A associé à la valeur propre λ.
(i) La matrice A_2 est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

A_3 admet deux valeurs propres 1 et $\frac{1}{2}$

$\text{rang}(A_3 - I_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2$. Donc $\dim E(A_3, 1) = 1$ car les colonnes C_1 et C_2 sont libres et $C_1 + C_2 + C_3 = (0)$.

$\text{rang}(A_3 - \frac{1}{2}I_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc $\dim E(A_3, \frac{1}{2}) = 1$ car les colonnes C_1 et C_2 sont libres et $C_3 = (0)$.

$\text{spect}(A_3) = \{0, \frac{1}{2}\}$, $\dim E(A_3, 1) + \dim E(A_3, \frac{1}{2}) < 3$ **:** A_3 **n'est pas diagonalisable dans** $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

(ii) Reprenons A_2

$\text{rang}(A_2 - I_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1$; donc $\dim E(A_2, 1) = 2$.

L'affirmation proposée est fausse

4–a)

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1, \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

$AX = \lambda X \iff \forall k \in [\![1;p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} A_{k,j}.x_j = \lambda x_k$. Pour $k = i$, on a :

$\sum_{j=1}^{p} A_{i,j}.x_j = \lambda.x_i$. Donc $\left|\sum_{j=1}^{p} A_{i,j}.x_j\right| = |\lambda.x_i|$ et compte tenu de l'inégalité triangulaire, il vient $|\lambda.x_i| \leq \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|.|x_j|$

$\sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|.|x_j| \leq \sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|.|x_i| = |x_i| \sum_{j=1}^{p} A_{i,j}$ (car les coefficients $A_{i,j}$ sont ≥ 0). Finalement $\sum_{j=1}^{p} |A_{i,j}|.|x_j| \leq |x_i|$.

$$\boxed{|\lambda x_i| \leq |x_i|}$$

4–b)

$|x_i| > 0$, sinon on aurait $\forall k \in [\![1;p]\!],\ |x_k| \leq 0$, donc $\forall k \in [\![1;p]\!],\ x_k = 0$. Le vecteur X serait nul ce qui est impossible car c'est un vecteur propre.

$|\lambda x_i| = |\lambda||x_i|$ et puisque $|x_i| > 0$, on obtient

$$\boxed{\forall \lambda \in \text{spect}(A),\ |\lambda| \leq 1}$$