BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

296
EML_MATE

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOURNEZ S.V.P.

EM LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Industrie de Lyon.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b. Déterminer une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$.

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que : $AM = MD$.

2.a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$.

c. Établir que (U, A) est une base de E.

d. Calculer le produit UA. Est-ce que UA est élément de E ?

3. On note $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour toute $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, par :

$$f(M) = AM - MD.$$

a. Vérifier que f est linéaire.

b. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

c. Quelle est la dimension de l'image de f ?

d. Déterminer les matrices M de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.
En déduire que 1 est valeur propre de f.
Montrer que -1 est aussi valeur propre de f.

e. Est-ce que f est diagonalisable ?

f. Montrer : $f \circ f \circ f = f$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6).$$

1.a. Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F.

b. Est-ce que F présente un extrémum local au point $(4, 2)$?
Est-ce que F présente un extrémum local au point $(2, 3)$?

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = x(x - 2)(2x - 5).$$

a. Montrer : $\forall x \in [4\,;+\infty[, \quad (x - 2)(2x - 5) \geqslant 4.$

b. En déduire : $\forall x \in [4\,;+\infty[, \quad \varphi(x) \geqslant 4x$ et $\varphi(x) \in [4\,;+\infty[.$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n).$$

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 4^{n+1}.$
Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

c. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{10}$.

4. On note $g : [4\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4\,;+\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

b. Trouver trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [4\,;+\infty[, \quad g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{2x - 5}.$$

c. Calculer $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

a. Rappeler l'expression d'une densité de U.

b. En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \forall x \leqslant 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2}. \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité f.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b. Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $P(X^2 \leqslant y)$. *On distinguera les cas* $y \leqslant 0$ *et* $y > 0$.

c. Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$.
Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2 et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

a. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.

b. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} P\left(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n\right)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

EM-LYON VOIE E 2006

CORRIGE

PREMIER EXERCICE

1–a)

La matrice A est triangulaire, les valeurs propres se lisent sur la diagonale.

$$\boxed{\text{spect}(A) = \{0, 1\}}$$

1–b)

On peut déjà affirmer que A est diagonalisable puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A possède deux valeurs propres distinctes. On remarque que D est une matrice diagonale, sur la diagonale de laquelle figurent précisement les valeurs propres de A, donc A est semblable à D. Néanmoins, pour déterminer une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$, il nous faut connaître les sous-espaces propres de A.

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2) et considérons l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A . Les valeurs propres de g sont 0 et 1.

- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. u appartient au sous-espace propre $E_0(f)$ si et seulement si (x, y) est solution du système $\begin{cases} y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$, donc $y = 0$

$$E_0(g) = \text{vect}((1, 0))$$

Remarque : D'après la lecture de la matrice A, on avait $g(e_1) = 0 = 0.e_1$, c'est-à-dire que e_1 apparaissait évidemment comme un vecteur propre associé à la valeur 0. Et comme A est diagonalisable et possède une autre valeur propre, le sous-espace propre associé à la valeur 1 est de dimension 1, donc on savait, sans calcul, que e_1 était une base de $E_0(g)$.

- $u = (x, y) \in E_1(g)$ si et seulement si (x, y) est solution du système $\begin{cases} -x + y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$ donc $x = y$

$$E_1(g) = \text{vect}((1, 1))$$

On peut prendre pour matrice $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2–a)

On a $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la matrice nulle (0) appartient à E. Soit $(M, N) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = MD + \lambda ND = (M + \lambda N)D$, donc $M + \lambda N \in E$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.