# EXERCICE 1.

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale $I_a$ converge et donner sa valeur.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$ puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Etablir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2}$.

4. Montrer que $f$ réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.

5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note $\alpha$ cette solution. Justifier que $\alpha \in ]0,1]$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

   (b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel $x$ donné renvoie le réel $f(x)$.

   A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier $N$ tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de $u_N$ correspondante.

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

8. On considère la fonction $T$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = xf(x)$.
Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

# EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note :
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients réels ;
- $I_n$ la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $0_n$ la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $W \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.

On admettra que si $U, V$ sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent alors :
- $U^k$ et $V^q$ commutent pour tous entiers $k$ et $q$;
- $U^{-1}$ commute avec $V$ lorsque $U$ est inversible.

1. Deux résultats préliminaires.

   (a) Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $U^q = 0_n$.

   Prouver que $I_n - U$ est inversible et que $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$.

   (b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A$.

   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \ker(f)$ et $f(x) \in \ker(f - \mathrm{Id})$ puis établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

2. Etude d'une suite de matrices. Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$

On introduit la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B_0 = B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = (B_k)^2 (2B_k - I_n)^{-1}.$$

On considère pour tout entier $k \geqslant 0$ la proposition

> $(\mathcal{H}_k)$ : « $2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $B_k - B = [B(B - I_n)]\, C_k$, et $B_k(B_k - I_n) = [B(B - I_n)]^{2^k} D_k$ avec $B_k B = B B_k$, $C_k B = B C_k$ et $D_k B = B D_k$ »

Tournez la page s.v.p.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

(a) Justifier que $I_n-(2B-I_n)^2$ est nilpotente et que $2B-I_n$ est inversible. En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

(b) On suppose la propriété $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un entier $k \geqslant 0$. Montrer que :

$$\begin{aligned} 2B_{k+1}-I_n &= [I_n+2B_k(B_k-I_n)]\times[2B_k-I_n]^{-1} \\ B_{k+1}-B &= \left[(B_k-B)^2-\left(B^2-B\right)\right]\times[2B_k-I_n]^{-1} \\ B_{k+1}(B_{k+1}-I) &= \left[B_k(B_k-I_n)(2B_k-I)^{-1}\right]^2 \end{aligned}$$

En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

(c) Prouver l'existence d'un entier $p$ tel que : $B_p(B_p-I_n)=0_n$.

Etablir que la matrice $B_p$ est diagonalisable, que la matrice $B-B_p$ est nilpotente et que : $\forall k \geqslant p, \quad B_{k+1}=B_k$.

# PROBLEME.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de $Z_k$ ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k=r)$ sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de $Z_k$ ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k=r)$.

## Partie I : Etude de deux endomorphismes.

Soit $n$ un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n$. Pour tout entier $k \in \{0,1,...n\}$, on désigne par $e_k$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$e_k = X^k$$

Rappelons que $(e_0,e_1,..,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(P)(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \text{ et } f(P)(1)=P(1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x)=[(X-1)P]'(x)=(x-1)P'(x)+P(x).$$



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

1. Prouver que $g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\ker(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que $g$ est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Ecrire la matrice $A$ de $f$ dans la base $(e_0, e_1, .., e_n)$ ainsi que la matrice $B$ de $g$ dans cette même base.
5. Montrer que $f$ et $g$ sont diagonalisables.

## Partie II : Etude d'une suite de variables aléatoires.

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_n$ et on suppose que $\forall i \in \{0, .., n\}$, l'urne $U_i$ contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, .., i$. On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne $U_n$. Si la boule porte le numéro $r$ alors on repose la boule dans l'urne $U_n$ puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne $U_r$.
- Plus généralement, pour tout entier $k$ non nul, si la boule numéro $s$ a été piochée au $k$-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne $U_s$.

Pour tout entier naturel $k$, on note :

- $Z_k$ est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au $k$-ième tirage. **On convient que $Z_0 = n$.**
- $F_k$ est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, x^r$.
- $E(Z_k)$ l'espérance de la variable $Z_k$.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, ..., n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

2. Etablir les deux formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, .., n-1\}$

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : (n+1)\, P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : (r+1)\, P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

3. On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, .., n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.

Tournez la page s.v.p.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $S_n$.

En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $S_{n-1}$ et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1) F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Etablir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.

   (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.

   (c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de $k$ et $n$. Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de $Z_k$ en fonction de $k$ et $n$.

## Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties **I** et **II** et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question **II.4** la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, .., n\}$ on désigne par $u_k$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$u_k = (X-1)^k.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r) e_r = F_k = f^k(e_n)$.
2. Prouver que $(u_0, u_1, .., u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, .., n\}$. Retrouver ainsi que $f$ est diagonalisable.
4. Justifier que : $e_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$ et que : $\forall r \in \{0.1, ...n\}, \quad u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$.
5. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r$.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, .., n\}$. A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

   (a) Soit $j \in \{0, 1, .., n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

   puis justifier que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, .., n\}$.

   (b) Déterminer un réel $C_n$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \frac{C_n}{2^k}$.

   La série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2012

# ECRICOME VOIE S 2012

## CORRIGE

## EXERCICE I

**1)**

- La fonction $\varphi_a$ définie par : $\varphi_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ ae^{-at} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre $a$. On sait alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} ae^{-at}dt$ converge et vaut 1. Il en résulte que

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}dt \text{ converge et } I_a = \frac{1}{a}\cdot}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ puisque $x \geq 0 \Longrightarrow x + e^t > 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{x+e^t}$ n'est impropre qu'en $+\infty$.

Or $\dfrac{1}{x+e^t} \underset{(+\infty)}{\sim} e^{-t}$. On vient de voir que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge (prendre $a = 1$). Par la règle d'équivalence des fonctions continues positives, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{x+e^t}$ converge, d'où

$$\boxed{\forall x \geq 0, \ \text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} \text{ converge : la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+}$$

**Remarque :** pour la fonction $g$, il suffisait de dire que $\dfrac{1}{(x+e^t)^2} \underset{(+\infty)}{\sim} e^{-2t}$ et d'utiliser le résultat précédent pour $a = 2$.

**2)**

$$\begin{aligned} 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t &\iff x + e^t - 2\sqrt{x}\sqrt{e^t} \geq 0 \\ &\iff (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0 \quad \text{, ce qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$

$$\forall x \geq 0, \ 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$$

$$\forall x > 0, \ \forall t \geq 0, \ \ 0 < \sqrt{x}\sqrt{e^t} \leq x + e^t \iff 0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}e^{\frac{t}{2}}} \text{ car } \sqrt{e^t} = (e^t)^{\frac{1}{2}}$$

D'après la question 1), l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}e^{\frac{t}{2}}}dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt$ converge et vaut


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

$\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On peut donc intégrer l'inégalité précédente entre 0 et $+\infty$ ; on obtient $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{x}\times e^{\frac{t}{2}}}$, c'est-à-dire $\boxed{\forall x>0,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}}$

**3)**

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ f(x)-f(y) &= \int_0^{+\infty}\frac{dt}{x+e^t} - \int_0^{+\infty}\frac{dt}{y+e^t}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}dt \qquad \textbf{(3)}\end{aligned}$$

Or $0 < e^t < x+e^t$ et $0 < e^t < y+e^t$ implique $0 < \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq \frac{1}{(e^t)^2} = e^{-2t}$, puis $0 < \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)} < (y-x)e^{-2t}$ puisque $x<y$.

Il n'y a pas de problème d'intégration entre 0 et $+\infty$ d'après la question 1), les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, donc

$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2\ /\ x<y,\ 0 \leq f(x)-f(y) \leq (y-x)\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$, et d'après la question 1),

$$\boxed{\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ x<y \Longrightarrow f(x)-f(y) \leq \frac{y-x}{2}}$$

**4)**

Il en résulte immédiatement que $0<x<y \Longrightarrow f(x)>f(y)$ d'après **(3)** car $t \mapsto \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } ]0,+\infty[}$$

On a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

Explications : $f(0)=I_1=1$ d'après la question 1) ; $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ par encadrement.

L'encadrement $0<f(x)-f(y) \leq \frac{y-x}{2}$ pour $x<y$ implique $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} f(y)=f(x)$. Par la symétrie des rôles joués par $x$ et $y$, on a $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y<x}} f(y)=f(x)$. La fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ (il est clair qu'en $x=0$ il n'y a que la continuité à droite). Donc

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection continue, strictement décroissante de } [0,+\infty[ \text{ sur son image } ]0,1]}$$

**5)**

Posons $\varphi(x)=f(x)-x$ pour $x \geq 0$. La fonction $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ ; elle est strictement décroissante pour les mêmes raisons ($x \mapsto -x$ est strictement décroissante).

$\varphi(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty$, donc la fonction $\varphi$ réalise une bijection continue, strictement décroissante de $[0,+\infty[$ sur son image $]-\infty,1]$. Comme 0 appartient à $]-\infty,1]$, il existe une unique réel $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $\varphi(\alpha)=0$.

$\exists !\ \alpha\in\mathbb{R}_+\ /\ f(\alpha)=\alpha$. Or $f(\alpha)\in f(\mathbb{R}_+)=]0,1]$, donc $\alpha\in]0,1]$.


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.