ESCP 2004 math III. Durée 4 heures

EXERCICE

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et par $\mathscr{B}$ sa base canonique : $\mathscr{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_6)$.

On pose $\mathscr{B}_1 = (e_1 ; e_2 ; e_3)$ et $\mathscr{B}_2 = (e_4 ; e_5 ; e_6)$ et on désigne respectivement par E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de E engendrés par $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

Enfin, A est la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Soit u l'endomorphisme de E_1 dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_1$ est A.
Déterminer les valeurs propres de u ainsi qu'une base de vecteurs propres.

2. Soit f l'application linéaire de E_1 vers E_2 définie par : $f(e_1) = e_4$, $f(e_2) = e_5$ et $f(e_3) = e_6$.
Montrer que f est un isomorphisme et déterminer la matrice de son isomorphisme réciproque f^{-1} relativement aux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_1$.

3. a) Montrer que, si $(x_1 ; x_2)$ est un élément de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = 0$, les vecteurs x_1 et x_2 sont nuls.

b) En déduire que, si $(x_1 ; x_2)$ et $(y_1 ; y_2)$ sont deux éléments de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, alors on a : $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

4. Pour tout vecteur x de E dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3 ; \lambda_4 ; \lambda_5 ; \lambda_6)$, on pose :
$x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, $x_2 = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6$ et $F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$

a) Prouver que l'application F qui à tout vecteur x de E associe le vecteur $F(x)$, est un endomorphisme de E.

b) Déterminer le noyau de F et en déduire que F est un automorphisme.

c) Montrer que la matrice M de F dans la base B peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On suppose, dans cette question, que μ est une valeur propre de F et que x est un vecteur propre associée à μ ; on définit les vecteurs x_1 de E_1 et x_2 de E_2 comme dans la question précédente.

a) Justifier que la valeur propre μ n'est pas nulle.

b) Utiliser les résultats de la question **3.** pour prouver que les vecteurs x_1 et x_2 sont tous les deux non nuls et que x_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\mu - 1/\mu$ ·

6. Étudier la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = x - 1 / x$ et en donner une représentation graphique.

7. On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de u et que x_1 est un vecteur propre de u associée à λ.

a) Montrer que l'équation d'inconnue μ suivante : $\lambda = \mu - 1/\mu$ admet deux solutions distinctes μ_1 et μ_2.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

b) Montrer que μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de F. Donner, en fonction de x_1, un vecteur propre de F associé à μ_1 et un vecteur propre de F associé à μ_2.

8. La matrice M est-elle diagonalisable ?

PROBLÈME

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leq r \leq 10$.
Une urne contient 10 boules distinctes $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega ; \mathscr{A} ; P)$.

Partie I : Étude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$.

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$ définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega ; \mathscr{A} ; P)$.

1. Cas particulier $r = 1$. Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.
a) Calculer la probabilité pour que les r boules $B_1, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.
b) En déduire la probabilité $P((Y_r = r))$.
c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$).
On pose : $X_1 = W_1$ et, pour tout i vérifiant $2 \leq i \leq r$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.
On admet que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$.
b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq r$.
c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.
d) On pose : $S_1(r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $E(Y_r)$ et la variance $V(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

4. a) Si k est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction $t \mapsto 1/t$ sur l'intervalle $[k ; k+1]$ et en déduire un encadrement de l'intégrale $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.
b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :
$$10 \ln(r+1) \leq E(Y_r) \leq 10 (\ln(r) + 1)$$
c) Si r est supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité : $1 - 1/(r+1) \leq S_2(r) \leq 2 - 1/r$. En déduire un encadrement de $V(Y_r)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Partie II : Étude du nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages .

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega ; \mathscr{A} ; P)$; on note $E(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n;k}$ la probabilité de l'événement $(Z_n = k)$ et on pose : $p_{n;-1} = 0$.

1. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2 . Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $E(Z_2) = 19\,r / 100$.

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$\textbf{(1)} \qquad 10\,p_{n;k} = (10 - r + k)\,p_{n-1;k} + (r + 1 - k)\,p_{n-1;k-1}$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r + 1$.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par : pour tout réel x ,

$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n;k}\,x^k$ on pose $Q_0(x) = 1$.

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2 .

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q'_n(1)$ en fonction de $E(Z_n)$, Q'_n désignant la dérivée du polynôme Q_n .

c) En utilisant l'égalité **(1)** , établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante : **(2)** $\quad 10\,Q_n(x) = (10 - r + r\,x)\,Q_{n-1}(x) + x(1 - x)\,Q'_{n-1}(x)$

d) En dérivant membre à membre l'égalité **(2)** , former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $E(Z_n)$ et $E(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n , la valeur de $E(Z_n)$ en fonction de n et de r .

4. a) Pour tout entier naturel n , le polynôme Q''_n désigne la dérivée du polynôme Q'_n .
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$.
En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q''_n(1) = r(r-1)\left(1 + (8/10)^n - 2\,(9/10)^n\right)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel n , la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r .

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

ESCP-EAP 2004 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1.

λ est valeur propre de u si et seulement si la matrice $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible (I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) , c'est-à-dire si le système **(S)** : $(A-\lambda I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ n'est pas un système de Cramer. Ce système est :

$$\left\{\begin{array}{rl} -\lambda x+2y+z &=0\\ 2x-\lambda y+z &=0\\ -2x+2y-(1+\lambda)z &=0\end{array}\right. \xrightarrow[L_1\longleftrightarrow L_2]{} \left\{\begin{array}{rl} 2x-\lambda y+z &=0\\ -\lambda x+2y+z &=0\\ -2x+2y-(1+\lambda)z &=0\end{array}\right. \xrightarrow[\substack{L_2\longleftarrow -2L_2+\lambda L_1\\ L_3\longleftarrow L_3+L_1}]{}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x-\lambda y+z &=0\\ (4-\lambda^2)y+(2+\lambda)z &=0\\ (2-\lambda)y-\lambda z &=0\end{array}\right. \xrightarrow[L_2\longleftrightarrow L_3]{} \left\{\begin{array}{rl} 2x-\lambda y+z &=0\\ (2-\lambda)y-\lambda z &=0\\ (2-\lambda)(2+\lambda)y+(2+\lambda)z &=0\end{array}\right. \xrightarrow[L_3\longleftarrow L_3-(2+\lambda)L_2]{}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x-\lambda y+z &=0\\ (2-\lambda)y-\lambda z &=0\\ (2+\lambda)(1+\lambda)z &=0\end{array}\right.$$

Le dernier système est triangulaire supérieur, **il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul** c'est-à-dire $2-\lambda=0$ ou $(2+\lambda)(1+\lambda)=0$

L'ensemble des valeurs propres de u est $\text{spect}(u)=\{-2,-1,2\}$

Détermination des sous-espaces propres $E(\lambda,u)$:

∗ Pour $\lambda=-2$, le système **(S)** devient

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+2y+z &=0\\ 4y+2z &=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} z &=-2y\\ x &=0\end{array}\right.$$

$E(-2,u)=\{xe_1+ye_2+ze_3\in E_1\ /\ x=0 \text{ et } z=-2y\}=\{y(e_2-2e_3)\in E_1\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

$$E(-2,u)=\text{vect}(e_2-2e_3)=\text{vect}((0,1,-2,0,0,0))$$

∗ Pour $\lambda=-1$, le système **(S)** devient

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+y+z &=0\\ 3y+z &=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} z &=-3y\\ 2x-2y &=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} z &=-3y\\ x &=y\end{array}\right.$$

$E(-1,u)=\{xe_1+ye_2+ze_3\in E_1\ /\ x=y \text{ et } z=-3y\}=\{y(e_1+e_2-3e_3)\in E_1\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

$$E(-1,u)=\text{vect}(e_1+e_2-3e_3)=\text{vect}((1,1,-3,0,0,0))$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

∗ Pour $\lambda = 2$, le système **(S)** devient

$$\begin{cases} 2x - 2y + z &= 0 \\ -2z &= 0 \\ 12z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ z &= 0 \end{cases}$$

$E(2,u) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_1 \ / \ x = y \text{ et } z = 0\} = \{x(e_1 + e_2) \in E_1 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{E(2,u) = \text{vect}(e_1 + e_2) = \text{vect}((1,1,0,0,0,0))}$$

L'endomorphisme u est diagonalisable car u est un endomorphisme d'un espace de dimension 3 et possède 3 valeurs propres distinctes : condition suffisante de diagonalisation satisfaite. On aurait pu dire aussi que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E_1 : c'est alors une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

On obtient une base de E_1 en prenant la famille $e'_1 = e_2 - 2e_3, e'_2 = e_1 + e_2 - 3e_3, e'_3 = e_1 + e_2$

2.

f est une application linéaire de E_1 dans E_2 qui ont tous les deux pour dimension 3 ;

f transforme la base (e_1, e_2, e_3) de E_1 en la base (e_4, e_5, e_6) de E_2 : c'est un isomorphisme de E_1 dans E_2

Si l'on veut la matrice de f dans les bases B_1 de E_1 et B_2 de E_2, il faut donner en colonne les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans la base (e_4, e_5, e_6) . Or $f(e_1) = e_4$, donc la liste des coordonnées de $f(e_1)$ dans B_2 est $(1,0,0)$; de même la liste des coordonnées de $f(e_2)$ dans B_2 est $(0,1,0)$ et celle de $f(e_3)$ est $(0,0,1)$.

La matrice de f dans les bases B_1, B_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: c'est I_3

Remarque : Cette matrice est évidemment inversible et l'on retrouve ainsi que f est un isomorphisme de E_1 dans E_2.

f^{-1} a donc pour matrice dans les bases B_2, B_1 la matrice inverse de f, donc I_3 ; il s'ensuit que

la matrice de f^{-1} dans les bases B_2, B_1 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: c'est également I_3

Remarque : Cela veut dire que $f^{-1}(e_4) = e_1$, $f^{-1}(e_5) = e_2$, $f^{-1}(e_6) = e_3$.

3–a)

Soit $x_1 \in E_1$, alors il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. De même il existe $(a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_2 = a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6$.

$x_1 + x_2 = 0 \iff \sum_{k=1}^{6} a_k e_k = 0 \iff \forall k \in [\![1;6]\!],\ a_k = 0$, car $(e_1, \ldots, e_6)$ est une famille libre, donc $x_1 = x_2 = 0$.

3–b)

Si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont deux éléments de $E_1 \times E_2$ tels que $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, alors on a $x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = 0$. Posons $z_1 = x_1 - y_1$, alors $z_1 \in E_1$ car E_1 est un sous-espace vectoriel de E (dès qu'il contient deux vecteurs, il contient leur différence) ; de même $z_2 = x_2 - y_2 \in E_2$. d'après **a)** , il vient $z_1 = z_2 = 0$, soit $\boxed{x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Remarque : Ce résultat était prévisible, car E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E ; tout vecteur de E se décompose alors de manière unique en la somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 ; c'est la cas $x_1 + x_2$ qui est un vecteur de E.

4–a)

Soit $x = x_1 + x_2$; $u(x_1)$ est un vecteur de E_1 puisque $u \in \mathcal{L}(E_1)$, donc de E ; $f(x_1)$ est un vecteur de E_2 puisque $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, donc de E et $f^{-1}(x_2)$ est aussi un vecteur de E_1 puisque $f^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$: donc la somme $u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$ appartient à E.

F **est une application de** E **dans** E

.

D'après la remarque précédente, tout vecteur x de E se décompose de manière unique en la somme $x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. De même pour $y \in E$ $\exists!(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $y = y_1 + y_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$ où $x_1 + \lambda y_1 \in E_1$ et $x_2 + \lambda y_2 \in E_2$; donc par définition de F.

$$\begin{aligned} F(x + \lambda y) &= u(x_1 + \lambda y_1) + f(x_1 + \lambda y_1) + f^{-1}(x_2 + \lambda y_2) \\ &= u(x_1) + \lambda u(y_1) + f(x_1) + \lambda f(y_1) + f^{-1}(x_2) + \lambda f^{-1}(y_2) \\ &\quad \text{par linéarité de } u, f, f^{-1} \\ F(x + \lambda y) &= u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2) + \lambda(u(y_1) + f(y_1) + f^{-1}(y_2)) \\ &= F(x) + \lambda F(y) \end{aligned}$$

F est donc une application linéaire de E dans E : $F \in \mathcal{L}(E)$

Remarque : Il y avait une démonstration pour les lecteurs qui connaissent les projecteurs (ou les projections).

Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. N'oublions pas que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. L'application $x \mapsto x_1$ est la projection de E sur E_1 de direction E_2 que nous noterons p_1 : c'est un endomorphisme de E ; l'application $x \mapsto x_2$ est la projection de E sur E_2 de direction E_1 que nous noterons p_2 : c'est un endomorphisme de E . On a donc $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$, donc

$$\begin{aligned} F(x) &= u(p_1(x)) + f(p_1(x)) + f^{-1}(p_2(x)) \\ &= (u \circ p_1)(x) + (f \circ p_1)(x) + f^{-1}(p_2(x))) \\ &= (u \circ p_1 + f \circ p_1 + f^{-1} \circ p_2)(x) \end{aligned}$$

$F = u \circ p_1 + f \circ p_1 + f^{-1} \circ p_2$;

c'est une somme d'endomorphismes de E**, c'est donc un endomorphisme de** E**.**

4–b)

Soit $x \in \operatorname{Ker} F$, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

$$F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2) = \underbrace{u(x_1) + f^{-1}(x_2)}_{\in E_1} + \underbrace{f(x_1)}_{\in E_2}$$

$F(x) = 0 \iff (u(x_1) + f^{-1}(x_2)) + f(x_1) = 0$ donc d'après la question **3. a)**

$$u(x_1) + f^{-1}(x_2) = f(x_1) = 0.$$

Comme f est un isomorphisme de E_1 dans E_2 , $f(x_1) = 0 \iff x_1 = 0$. L'égalité $u(x_1) + f^{-1}(x_2) = 0$ devient alors $f^{-1}(x_2) = 0$ et comme f^{-1} est un isomorphisme de E_2 dans E_1, on a $x_2 = 0$: finalement $x_1 + x_2 = x = 0$

L'égalité $F(x) = 0 \iff x = 0$, donc $\operatorname{Ker} F = \{0\}$: F est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie (ici 6) : F est un automorphisme de E

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.