BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Code épreuve : 297

Conception : EDHEC

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 7 mai 2012 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   b) En déduire les valeurs propres de f.
   c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.
   b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$.

On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.
Établir que $\operatorname{Ker} f^2$ est stable par g puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4) Étude d'un cas plus général. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que : $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha Id)$.

b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha Id)$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-x X_0$.

b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - x X_0$, la fonction f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\lambda \frac{z}{x}} & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \operatorname{Sup}(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que :

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.$$

4) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \operatorname{Inf}\{k \in \mathbb{N}^*, X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leq X_0)$.

b) Montrer que $(Z = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leq X_0)$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(X = n)$ et $(Z = n)$ ont même probabilité.

5) Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est "**function z : real ;**" qui simule la loi de Z.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par : $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$.
On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division par $1+X^3$ du polynôme $(1-X+X^2)P$.
Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1-X+X^2)P = (1+X^3)Q + f(P), \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) a) Déterminer $f(e_0), f(e_1)$ et $f(e_2)$ puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   b) En déduire une base de $\mathrm{Im} f$.
   c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker} f$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker} f$.
3) a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im} f$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - 3Id)$$
   b) Montrer que f est diagonalisable.
4) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.
   a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   b) Vérifier que $\mathrm{Ker} f$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im} f$ dans E pour ce produit scalaire.
5) a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ.
   b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ puis retrouver le résultat de la question 4b).

Problème

On admet que, si une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, alors on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \,,\ T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \ \text{ et } \ y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\,x_i$$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

   b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2) Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n .$$

a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k\,x_k\right)^{1/n}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln x\,dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ -1+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4) On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.
Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

5) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2012

EDHEC VOIE S 2012

CORRIGE

EXERCICE I

1–a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^3 - 2A^2 = (0)$; le polynôme $P = X^3 - 2X^2$ est annulateur de A.

1–b)

$P = X^2(X-2)$, donc $\boxed{\operatorname{spect}(f) \subset \{0, 2\}}$

On constate, d'après la matrice A de f que $f(e_2) = -f(e_3)$, donc $e_2 + e_3 = (0,1,1)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

$$0 \text{ est valeur propre de } f$$

Notons, d'une manière générale, $E(\lambda, f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

- Déterminons $\operatorname{Ker} f = E(0, f)$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} f &\iff \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -x + 3y - 3z &= 0 \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ -x + y - z &= 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff x = 0,\ y = z \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = E(0, f) = \operatorname{vect}((0,1,1))}$$

- Déterminons $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) &\iff \begin{cases} x + y - z &= 2x \\ -x + 3y - 3z &= 2y \\ -x + y - z &= 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y - z &= 0 \\ -x + y - 3z &= 0 \\ -x + y - 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y - z &= 0 \\ -x + y - 3z &= 0 \end{cases} \iff x = y,\ z = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = E(2, f) = \operatorname{vect}((1,1,0))}$$

Jean MALLET

$$\boxed{\dim E(0,f) + \dim E(2,f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 \text{ : l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

2)

Analyse : notons (u_1, u_2, u_3) cette base B. D'après la lecture de la matrice T, on a :

$f(u_1) = 0,\ \ f(u_2) = u_1$ et $f(u_3) = 2u_3$.

Nous prendrons $u_3 = (1, 1, 0)$ d'après la question précédente.

$u_1 \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ car $u_1 = f(u_2)$.

Déterminons $\operatorname{Im} f$. On vient de voir que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}((0, 1, 1))$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = 2$, donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), f(e_2)) = \operatorname{vect}((1, -1, -2), (1, 3, 2))$ puisque ces deux vecteurs sont libres, donc forment une base de $\operatorname{Im} f$.

$u = (x, y, z) \in \operatorname{Im} f \iff \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ /\ u = a(1, -1, -2) + b(1, 3, 2)$. Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{cases} a + b & = x \\ -a + 3b & = y \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ -2a + 2b & = z \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b & = x \\ 4b & = y + x \\ 4b & = z + 2x \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b & = x \\ 4b & = y + x \\ 0 & = z - y + x \end{cases}$$

L'équation de $\operatorname{Im} f$ est donc $x - y + z = 0$. On remarque que le vecteur $(0, 1, 1)$ appartient à $\operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f.$$

Prenons $u_1 = (0, 1, 1)$ et cherchons $u_2 = (x, y, z) \ /\ f(u_2) = u_1$. Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ -x + 3y - 3z & = 1 \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ -2x + 2y - 2z & = 1 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ 4y - 4z & = 1 \\ 4y - 4z & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y & = z \\ y & = z + \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -\frac{1}{4} \\ y & = z + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$u_2 = (-\frac{1}{4}, z + \frac{1}{4}, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

Synthèse :

Prenons donc $u_1 = (0, 1, 1),\ u_2 = (-\frac{1}{4}, z + \frac{1}{4}, z)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$.

D'après l'analyse, on a $f(u_1) = 0,\ f(u_2) = u_1,\ f(u_3) = 2u_3$. On aura répondu à la question s'il existe une valeur de z telle que la famille (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$ et pour cela il suffit qu'elle forme une famille libre.

Déterminons le rang de cette famille en considérant la matrice C de ces trois vecteurs dans la bases B_c.

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & z+\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & z & 0 \end{pmatrix} L_2 \longleftrightarrow L_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & z+\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & z & 0 \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & z+\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & z+\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cette matrice est de rang 3, donc la famille (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Il existe une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut prendre $u_1 = (0,1,1),\ u_2 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ et $u_3 = (1,1,0)$

3–a)

D'après la matrice A^2,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f^2 &= \{u = (x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \ / \ x + y - z = 0\} \\
&= \{u = (x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}
\end{aligned}$$

$\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{vect}((1,0,1),(0,1,1)$; d'après la question 1), $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) = \operatorname{vect}((1,1,0))$.

On a $\dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) = 2 + 1 = 3$. Déterminons $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$.

Soit $u \in \operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$; $f^2(u) = 0$ et $f(u) = 2u$, donc $f^2(u) = 2f(u) = 4u$ et par suite $4u = 0$, c'est-à-dire $u = 0$.

Les deux sous-espaces sont en somme directe, la somme de leurs dimensions vaut $3 = \dim \mathbb{R}^3$,

$\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Remarquons que u_1 et u_2 appartiennent à $\operatorname{Ker} f^2$ car leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifient l'équation de $\operatorname{Ker} f^2$. Comme $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$ et que ces deux vecteurs forment une famille libre, on en déduit qu'ils forment une base de $\operatorname{Ker} f^2$. $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{vect}(u_1, u_2)$.

3–b)

- Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$ et soit $u \in \operatorname{Ker} f^2$, alors $f^2(u) = 0$.

$$\begin{aligned}
f^2(g(u)) &= g^4(g(u)) \quad \text{(car on suppose que } g^2 = f) \\
&= g(g^4(u)) = g(f^2(u)) \\
&= g(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\forall u \in \operatorname{Ker} f^2,\ g(u) \in \operatorname{Ker} f^2 : \operatorname{Ker} f^2 \text{ est stable par } g.$$

La base B est celle trouvée dans la question 2–b) et vaut (u_1, u_2, u_3) où